Table des matières

I Opérations **1**
I.1 Produit, puissances 1
I.2 Inversibilité 1
I.3 Matrices et bases 2

II Trace **2**
II.1 Trace d'une matrice 2
II.2 Trace d'un endomorphisme 3

III Déterminant **3**
III.1 Déterminant de taille n 3
III.2 Propriétés calculatoires 3
III.3 Déterminant et espace vectoriel 3

I Opérations

I.1 Produit, puissances

Proposition 1 (Opérations sur les matrices)

1. Les règles de calculs sur les sommes de matrices sont les mêmes que pour les nombres, en prenant garde à sommer des matrices de même taille.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ (remarquer le même p pour le nombre de colonnes de A et de ligne de B), alors la matrice produit est $C = AB \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient d'indices i, j de C est (notations évidentes pour les coefficients)
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$
On peut tout à fait retrouver cette formule en posant le produit matriciel.
3. Avec les mêmes notations, et en posant $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ et on peut noter λAB.
4. Même pour des matrices carrées pour lesquelles AB et BA existent (parfois le produit n'est possible que dans un sens, par exemple une matrice carrée multipliée par une colonne) on a en général $AB \neq BA$.
5. Si on peut calculer ce produit matriciel, alors $(AB)C = A(BC)$ et on peut noter ABC.

Proposition 2 (Théorème du binôme, version matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

Proposition 3
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors
$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

I.2 Inversibilité

Définition 1
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$AB = I_n = BA.$$
Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

Proposition 4
On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour $\times$:

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Définition 2
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le noyau de A est noté $\ker(A)$ et $\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^p |\ AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}$. Il s'agit de l'ensemble des solutions du système homogène associé à A.
2. L'image de A est notée $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathbb{K}^n |\ \exists X \in \mathbb{K}^p\ Y = AX\}$. On montre facilement que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.
L'interprétation en terme de système est : $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble de tous les seconds membres tels que le système de matrice A correspondant est compatible (possède au moins une solution).

Rappel : dans le cas d'un système compatible de matrice A (s'il est homogène il l'est forcément), l'ensemble des solutions est de dimension $\dim(\ker(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$.

Théorème 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne) } \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n \ AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n \end{aligned}$$

I.3 Matrices et bases

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on note a_{ij} la ième coordonnée de u_j.

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des u_j, et on note les coordonnées en colonne.

Proposition 5
Le rang d'une famille est le même que le rang de sa matrice dans une base. En particulier, ce rang ne dépend pas de la base choisie.

Définition 4
1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Théorème 2
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B}_E,\ \mathcal{B}_F,\ \mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Théorème 3
Soit $f : E \to F$ une application linéaires entre ensemble de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. f est un isomorphisme ssi $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$.

Définition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base**

Théorème 4
Soient E un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = P^{-1} M P$

Définition 6
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1} B P$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

II Trace

II.1 Trace d'une matrice

Définition 7
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ le **nombre** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 6
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{tr}(A) + \beta \,\mathrm{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

II.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 5
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\operatorname{tr}(f)$.

III Déterminant

III.1 Déterminant de taille n

Définition-Proposition 2
Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. det est linéaire par rapport à chaque colonne.
3. det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

Proposition 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

Corollaire 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Théorème 6
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Proposition 8
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

III.2 Propriétés calculatoires

Théorème 7
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Plus généralement, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.

Corollaire 2
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dans ce cas, on a également

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \det(A^k) = \det(A)^k$$

Théorème 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det({}^tA)$.

Théorème 9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $j$ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $i$ème ligne)

Corollaire 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

III.3 Déterminant et espace vectoriel

Définition 8
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

Proposition 9
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

Théorème 10
Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Définition 9
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

Proposition 10
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. $\det(Id_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.