Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel non nul.

I Opérations

I.1 Produit, puissances

I.1.1 Proposition (Opérations sur les matrices)

1. Les règles de calculs sur les sommes de matrices sont les mêmes que pour les nombres, en prenant garde à sommer des matrices de même taille.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ (remarquer le même p pour le nombre de colonnes de A et de ligne de B), alors la matrice produit est $C = AB \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient d'indices i, j de C est (notations évidentes pour les coefficients)
$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$
On peut tout à fait retrouver cette formule en posant le produit matriciel.
3. Avec les mêmes notations, et en posant $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ et on peut noter λAB.
4. Même pour des matrices carrées pour lesquelles AB et BA existent (parfois le produit n'est possible que dans un sens, par exemple une matrice carrée multipliée par une colonne) on a en général $AB \neq BA$.
5. Si on peut calculer ce produit matriciel, alors $(AB)C = A(BC)$ et on peut noter ABC.

I.1.2 Notation

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée on note $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times \cdots \times A$ (p fois).

I.1.3 Exemple
Factoriser $A^2 + A - 2I_n$

I.1.4 Exemple
On suppose qu'une matrice carrée A vérifie $A^2 + A - 2I_n = 0$. Calculer le reste de la division euclidienne de X^k par $X^2 + X - 2$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression de A^k.

I.1.5 Proposition (Théorème du binôme, version matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} A^k B^{n-k}$$

I.1.6 Exemple
Calculer toutes les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$

I.1.7 Proposition
Soit $n \in \mathbb{N}, A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$ alors
$$A^n - B^n = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} = (A-B) \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} B^k$$

Exercice 1
On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre $r > 0$, c'est à dire que $A^r = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et calculer son inverse.

exo : donner un exemple d'une telle matrice.

I.1.8 Rappels sur les matrices particulières

Un produit ou une somme de matrices triangulaire (ou diagonale) reste triangulaire.

Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $D^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec la convention $0^0 = 1$).

I.1.9 Produit et transposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$ ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$.

I.1.10 Lignes et colonnes

Soit L une matrice ligne de taille n et C une matrice ligne de taille n. Donner les tailles (et le rang) des matrices CL et LC.

I.1.11 Produit par une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}$ une colonne. Calculer puis exprimer en fonction des colonnes de A le produit AX.

I.2 Inversibilité

I.2.1 Définition
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n = BA.$$

Dans ce cas on note $B = A^{-1}$ et pas $\frac{1}{A}$. En particulier on ne notera pas de quotients de matrices, mais des produits par l'inverse.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n inversibles. Ce n'est pas un espace vectoriel !

I.2.2 Proposition
On dit que $GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour $\times$:

1. $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
2. Le produit de deux matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ inversibles est encore inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

I.2.3 Lien avec la transposition

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ donc la relation I.1.9 est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

I.2.4 Inverse particulière

Une matrice triangulaire A est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. A^{-1} est triangulaire de même type et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A.

En particulier, la relation I.1.8 est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$ dès que les a_n sont tous non nuls.

I.2.5 Définition
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le noyau de A est noté $\ker(A)$ et $\ker(A) = \{X \in \mathbb{K}^p | \ AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}$. Il s'agit de l'ensemble des solutions du système homogène associé à A.
2. L'image de A est notée $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathbb{K}^n | \ \exists X \in \mathbb{K}^p \ Y = AX\}$. On montre facilement que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.

   L'interprétation en terme de système est : $\mathrm{Im}(A)$ est l'ensemble de tous les seconds membres tels que le système de matrice A correspondant est compatible (possède au moins une solution).

Rappel : dans le cas d'un système compatible de matrice A (s'il est homogène il l'est forcément), l'ensemble des solutions est de dimension $\dim(\ker(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$.

I.2.6 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff A \underset{L}{\sim} I_n \text{ (équivalente par ligne)} \iff A \underset{C}{\sim} I_n \\ &\iff (C_1, \dots C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ &\iff (L_1, \dots L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\ &\iff \mathrm{rg}(A) = n \iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists ! X \in \mathbb{K}^n \ AX = Y \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n \end{aligned}$$

I.2.7 Cas $n = 2$ ou 3

On a en plus $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$.

I.3 Matrices et bases

I.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on note a_{ij} la ième coordonnée de u_j.

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des u_j, et on note les coordonnées en colonne.

I.3.2 Exemple

Rappel : $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner la matrice de $(P_1, P_2, P_3) = (X - 1, 2X^2 + 3, X^2 + 2X + 4)$ dans $\mathcal{B}$. Est-elle inversible ? Quelle est la signification pour cette famille de polynômes ?

I.3.3 Proposition

Le rang d'une famille est le même que le rang de sa matrice dans une base. En particulier, ce rang ne dépend pas de la base choisie.

I.3.4 Définition

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.
2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

I.3.5 Exemple

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}) = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

I.3.6 Produit matriciel et évaluation

Avec les notations de la définition. Soient en plus $x \in E$ et $y \in F$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y), A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$.

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

Multiplier par A revient à calculer l'image par f (à condition que les bases soient les bonnes).

I.3.7 Exemple

Avec l'exemple précédent, sur les polynômes, poser f canoniquement associée et calculer $f(X^2 - 2X + 3)$.

I.3.8 Théorème

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}_G$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = M_g M_f \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

I.3.9 Exemple

Toujours avec le même exemple, calculer la matrice dans $\mathcal{B}$ de $f^2 = f \circ f$ puis de f^k.

I.3.10 Théorème
Soit $f : E \to F$ une application linéaires entre ensemble de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. f est un isomorphisme ssi $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = M_f^{-1}$.

I.3.11 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

On exprime la **nouvelle base** $\mathcal{B}'$ en fonction de l'**ancienne base**

I.3.12 Théorème
Soient E un $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors $M' = P^{-1}MP$

I.3.13 Exemple
Donner la matrice dans la base canonique de f^k, toujours pour la même application f.

I.3.14 Définition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

I.3.15 Remarque

1. Deux matrices semblables ont le même rang.
2. La seule matrice semblable à I_n est elle même.

II Trace

II.1 Trace d'une matrice

II.1.1 Définition
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ le **nombre** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

II.1.2 Exemple
Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, calculer $\mathrm{tr}({}^tAA)$.

II.1.3 Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\mathrm{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Exercice 2
Montrer que le noyau de la trace est un hyperplan et en donner une base.

II.1.4 Effet du produit

Montrer que dans le cas général on a pas $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A)^2$.

II.2 Trace d'un endomorphisme

II.2.1 Théorème
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Preuve.
Notons $C = AB$ et $D = BA$ avec $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ et $C = (c_{i,j}), D = (d_{i,j})$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n^2]\!]$ on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et donc $\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}$ en échangeant les sommes.

On renomme maintenant les indices : $\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \mathrm{tr}(D)$ ■

Exercice 3
Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}(A{}^tB)$ avec les notations du théorème.

En déduire la valeur de cette trace dans le cas où A est symétrique et B anti-symétrique.

II.2.2 Matrices semblables

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

En effet, si on a $A = P^{-1}BP$ pour une matrice inversible P (voir P comme une matrice de passage), alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}((P^{-1}B)B) = \operatorname{tr}(P(P^{-1}B)) = \operatorname{tr}(B)$.

II.2.3 Invariants

On peut maintenant dire que deux matrices semblables ont :

1. le même rang
2. la même trace

II.2.4 Définition-Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\operatorname{tr}(f)$.

II.2.5 Exemple

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{cases}$. Calculer $\operatorname{tr}(f)$.

Exercice 4

Soit p un projecteur dans E de dimension finie. Montrer que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

II.2.6 Linéarité

Pour $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ on a $\operatorname{tr}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{tr}(f) + \beta \operatorname{tr}(g)$.

III Déterminant

III.1 Déterminant de taille n

III.1.1 Définition-Proposition

Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. det est linéaire par rapport à chaque colonne.
3. det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

III.1.2 Conséquences de la définition

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Si on a $C_i = 0$ pour un certain i alors $\det(A) = 0$ par linéarité par rapport à la $i$ème colonne.

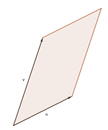
— Si on a $C_i = C_j$ pour $i \neq j$ alors $\det(A) = -\det(A)$ par échange de ces deux colonnes donc $\det(A) = 0$.

III.1.3 Exemple

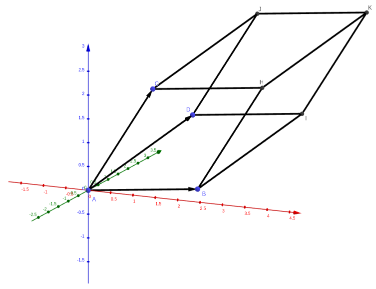
Calculer $\begin{vmatrix} 7 & -42 \\ -3 & 18 \end{vmatrix}$

III.1.4 Interprétation géométrique

En dimension 2 : il s'agit de l'aire (algébrique, ie on obtient un nombre négatif dans le cas d'un sens indirect) d'un parallélogramme



En dimension 3 :il s'agit du volume (algébrique) d'un parallélépipède. Dans la figure suivante, on construit un parallélépipède sur les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ et $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$ (où les coordonnées sont calculées dans la base canonique) vaut le volume du parallélépipède.



III.1.5 Notation

Comme en dimension 2 et 3, on note un déterminant sous forme d'un tableau de nombre entouré de barres verticales.

III.1.6 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

III.1.7 Corollaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

III.1.8 Calcul en pratique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On réduit A par colonnes pour calculer son déterminant. Attention aux opérations d'échange ou de multiplication par un scalaire.

III.1.9 Exemple

Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

III.1.10 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Preuve.
En reprenant les notations de III.1.6, on remarque que $\det(A) = 0 \iff \det(A') = 0$ Réduisons la matrice par colonne et notons R la matrice réduite. On a $\det(R) = 0 \iff \det(A) = 0$.

$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff R = I_n$. Ainsi si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) \neq 0$ car $\det(I_n) = 1 \neq 0$.

Supposons au contraire que $A \neq GL_n(\mathbb{K})$. Alors R possède au moins une colonne nulle (autant que la dimension du noyau de A d'ailleurs) et $\det(R) = 0$ donc $\det(A) = 0$. ∎

III.1.11 Exemple
Trouver à quelle condition sur $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ -1 & a^2 & a \end{pmatrix}$ est inversible

III.1.12 Remarque

Le déterminant est toujours une expression polynomiale des coordonnées (s'exprime comme produits et sommes des coordonnées de la matrice)

III.1.13 Exemple
Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

III.1.14 Proposition
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve.
Remarquer que le déterminant est nul ssi un des coefficient diagonaux est nul ssi la matrice triangulaire n'est pas inversible.

Dans ce cas d'une matrice inversible, le calcul est direct, sur le même modèle que l'exemple. ∎

III.1.15 Méthode

Une première méthode de calcul du déterminant :

1. Echelonner la matrice par opérations élémentaires (attention à la valeur du déterminant qui change parfois)
2. Calculer le produit des coefficients diagonaux.

III.2 Propriétés calculatoires

III.2.1 Théorème
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Plus généralement, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.

Preuve.
Si A n'est pas inversible, AB non plus et donc le résultat est vrai.

Sinon, considérons $f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (C_1, \ldots, C_n) & \mapsto & \frac{\det(AC_1, \ldots, AC_n)}{\det(A)} \end{array} \right.$.

Alors $f(I_n) = 1$, si on échange deux colonne de M, f change de signe. De plus, f est linéaire par rapport à chaque colonne par composition et produit par une constante ($X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et le déterminant est linéaire par rapport à cette colonne).

Ainsi $f = \det$. TADAM !

On prouve l'affirmation générale par une récurrence immédiate. ∎

III.2.2 M-Attention

On a surtout pas $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

III.2.3 Corollaire
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dans ce cas, on a également

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \det(A^k) = \det(A)^k$$

Preuve.
On a directement $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ ce qui prouve le cas $k = -1$, le seul qu'il manquait dans le théorème précédent. ∎

III.2.4 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det({}^tA)$.

Preuve.
Hors programme

1. On a $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff {}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi $\det(A) = 0 \iff \det({}^tA) = 0$. Dans toute la suite on suppose que A est inversible.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Rappelons que les matrices élémentaires sont d'un des trois type suivant : $E_{i,\lambda} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \lambda, 1, \ldots, 1)$ (le $\lambda \neq 0$ en $i$ème position, cette matrice traduit l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$), $E_{i,j}$ qui est la matrice I_n ayant subit l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (traduit la dite opération) ou $E_{i,j,\lambda}$ qui la matrice I_n ayant subit l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
   Un calcul direct montre que ${}^tE_{i,\lambda} = E_{i,\lambda}$ et donc ces deux matrices ont le même déterminant, $\det(E_{i,j}) = -1 = \det({}^tE_{i,j})$ (à calculer par un échange de colonnes pour retrouver l'identité) et $\det(E_{i,j,\lambda}) = 1 = \det({}^tE_{i,j,\lambda})$ (ces matrices sont triangulaires, l'un inférieure l'autre supérieure et avec des 1 sur la diagonale).
   Ainsi le théorème est vrai pour les matrices élémentaires.
3. Rappelons que l'on suppose A inversible. Alors on peut écrire $A = E_r E_{r-1} \ldots E_1$, un produit de matrices élémentaires.
   Alors ${}^tA = {}^tE_1 {}^tE_2 \ldots {}^tE_r$. Le théorème III.2.1, ainsi que le point précédent permettent de conclure à l'égalité souhaitée. ∎

III.2.5 Conséquences

On peut maintenant effectuer des opérations élémentaires sur les lignes au même titre que sur les colonnes, avec les mêmes effets.

III.2.6 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $j$ème colonne)
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $i$ème ligne)

Preuve.
Admis. Une idée de preuve (un peu pénible, mais pas si difficile) : on reprend les notations de III.1.6 et on prouve le premier point pour j fixé. On prouve alors que l'application de la formule à A' est l'opposé de celle à A pour un échange de colonne et donne le même résultat pour une combinaison de colonnes. Ainsi la formule est

vraie pour A' ssi elle l'est pour A. Il suffit ensuite de réduire A et de remarquer que la formule est triviale pour l'identité. ∎

III.2.7 Tableau des signes

On résume souvent les signes qui apparaissent dans cette formule par

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

III.2.8 Exemple
Calculer le déterminant $d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1$ et on développe par rapport à la 3ième colonne : $d = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3 \times 1 - 2 \times (-5)) = 13$.

III.2.9 Méthode

Une deuxième méthode de calcul du déterminant : Appliquer bêtement une des formules précédente.

Une bonne idée sera de faire apparaître des 0 sur une ligne ou colonne pour réduire le nombre de termes dans le développement.

III.2.10 Exemple
Calculer le déterminant $d_n = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & -3 & 2 \\ 0 & & \dots & & 1 & -3 \end{vmatrix}_{[n]}$

III.2.11 Corollaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Preuve.
Immédiat par récurrence et utilisant les propriétés calculatoires de la conjugaison (somme, produit). ∎

III.3 Déterminant et espace vectoriel

III.3.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

III.3.2 Lien avec la géométrie

Ce que l'on appelait déterminant d'une famille dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est en fait le déterminant dans la base canonique. Rappel : dans $\mathbb{R}^2$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ssi $\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires.

III.3.3 Proposition
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs.

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

III.3.4 Exercice
Que vaut $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$ *dans ce cas ?*

III.3.5 Exemple
Montrer que $(\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.3.6 Théorème
Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Preuve.
Posons a $A = P^{-1}BP$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

On a alors $\det(A) = \det(P^{-1}) \det(B) \det P = \frac{1}{\det(P)} \det(P) \det(B) = \det(B)$. ∎

III.3.7 Invariants

Nous voilà avec 3 invariant de changement de base pour les endomorphismes : le rang, la trace et le déterminant.

III.3.8 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

III.3.9 Exemple
On considère l'application $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$. Calculer son déterminant.

III.3.10 Exemple
On considère des espaces supplémentaires $E = F \oplus G$ avec $F, G \neq \{0_E\}$ (ce qui impose $\dim(E) > 1$). Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Calculer $\det(s)$. De même avec p le projecteur sur F parallèlement à G.

III.3.11 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. $\det(Id_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

III.3.12 Puissances

On a directement $\det(f^n) = \det(f)^n$ qui est valable par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ et même $n \in \mathbb{Z}$ si f est bijective.