

Devoir maison n°1

A rendre le 14/09

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans cette première question, on s'intéresse à la fonction arctan

(a) Donner un développement limité de arctan à l'ordre 4 en 0.

(b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Poser une fonction f . Ne pas oublier de vérifier la dérivabilité. Ne pas confondre la fonction f et le nombre $f(x)$. Préciser, pour conclure que f est constante, qu'on l'étudie sur un intervalle.

(c) Trouver les réels a, b, c tels que $\arctan x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)$

2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ des réels strictement positifs.

(a) Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{x^a(\ln(x))^b}$.

Une subtilité ici : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ qui n'est pas un entier, $t \mapsto t^\alpha$ est définie sur $]0, +\infty[$ lorsque $\alpha < 0$ et sur $[0, +\infty[$ lorsque $\alpha \geq 0$ d'après un prolongement par continuité fait en cours de sup.

(b) Trouver toutes les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.

Ne pas oublier de traiter le cas $\alpha = a$.

(c) Donner un équivalent de $f(x)$ en 1.

En posant $u = x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ on abouti vite au résultat par produit et quotient d'équivalents usuels.