# Devoir surveillé n°1

Durée : 3H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

**Exercice 1 (Questions de cours)**

1. Donner les développements limités suivant ($n$ est un entier naturel non nul)

   (a) $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre n

   (b) $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$

   (c) $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 3, où $\alpha \in \mathbb{R}$

   (d) $\ln(1+x)$ à l'ordre $n$.

2. Rappeler la valeur des sommes de séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ en précisant pour quelles valeurs de $x$ ces calculs sont valables.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
4. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ie. $A$ est la matrice de $f$ dans la base canonique). Calculer $\ker(f)$.
5. Pour la matrice $A$ de la question précédente, calculer $A^2$ puis exprimer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En utilisant les développements limités, trouver un développement lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = an\ln(1+\frac{1}{n}) + b\cos(\frac{1}{n}) + c\sin(\frac{1}{n})$ en fonction des réels $a, b, c$ (non tous les 3 nuls). Donner une condition pour que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge

**Exercice 2**

Pour $x \in ]-1,1[$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

1. (a) Donner un intervalle sur lequel tan est dérivable et rappeler l'expression de sa dérivée.

   (b) En déduire que arctan est dérivable sur un intervalle à préciser et montrer que $\arctan' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

   (c) En déduire la valeur de $J(x)$.
2. Vérifier que $(J_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série absolument convergente. Nous allons maintenant chercher à déterminer la somme de cette série.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t$ en fonction de $x$ et $k$.
4. Montrer que $\forall x \in ]0,1[ \forall n \in \mathbb{N}\ J_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
5. Montrer que $\forall x \in ]0,1[ \forall n \in \mathbb{N}\ |J(x) - J_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n+3}$. On pourra montrer que $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$ pour des valeurs de $t$ à préciser.
6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.
7. Écrire une fonction python `Jn(n, x)` prenant en argument un entier n et un nombre x et retournant la valeur de $J_n(x)$.
8. On veut obtenir une approximation de $\arctan\frac{1}{2} = J(\frac{1}{2})$ à $10^{-4}$ près. Donner une ou des commandes python permettant d'obtenir cette approximation.

**Exercice 3 (Calcul de $\zeta(2)$)**

Rappelons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente. On va chercher à calculer sa somme, généralement notée $\zeta(2)$.

1. Dans cette première question nous allons établir un cas particulier d'un résultat important (appelé lemme de Lebesgue).

   On considère $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$

   (a) Pour $a \in ]0,+\infty[$, établir que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t = \frac{f(0) - f(\pi)\cos(a\pi)}{a} + \frac{1}{a}\int_0^\pi f'(t)\cos(at)\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $\frac{f(0)-f(\pi)\cos(a\pi)}{a} \underset{a\to+\infty}{\to} 0$.

(c) En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t \underset{a\to+\infty}{\to} 0$ en montrant que $\displaystyle\left|\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t\right| \underset{a\to+\infty}{\to} 0$.

2. Dans cette deuxième question, nous allons établir par une première méthode une formule de calcul de somme classique.

   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Établir que $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

   (b) Soit $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Attention à l'indice de départ.

   (c) Rappeler, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ et en déduire la linéarisation de $\cos(a)\sin(b)$ (écrire sous forme de somme, sans produit de fonction trigonométrique).

   (d) Montrer que, pour $x \in ]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$$

3. Voici une deuxième méthode pour ce calcul de somme. Calculer, pour $x \in ]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$

$$\sin(\frac{x}{2})\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

   en utilisant éventuellement une formule trigonométrique de la question précédente.

4. On considère maintenant la fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} ]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mapsto \frac{x}{2\sin(\frac{x}{2})} \end{array}\right.$. Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et en déduire que $\varphi$ est prolongeable par continuité en 0. On note encore $\varphi$ le prolongement par continuité.

5. Montrer que $\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$, calculer $\varphi'$ puis montrer que $\varphi$ prolongée par continuité est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2\pi, 2\pi[$.

6. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

7. Pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$. Montrer que

$$S_N = \int_0^\pi \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right)\varphi(t)\sin((N+\frac{1}{2})t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\mathrm{d}t$$

8. En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

**Exercice 4**

On considère la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, ainsi que $B = I_3 - A$ et $C = 2A - I_3$.

1. Calculer les rangs de $A, B$ et $C$.

2. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trouver $S_A$ l'ensemble des solutions de $AX = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $S_B$ l'ensemble des solutions de $BX = 0_{\mathbb{R}^3}$ (d'inconnues $X$, et sous forme de Vect si besoin...).
   Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés : $S_A$ et $S_B$ sont objets classiques en géométrie, dire lesquels.

3. Montrer que $S_A$ et $S_B$ sont perpendiculaires. (sisi, refaire les calculs précédents au besoin).

4. Donner sans calculs supplémentaires les solutions de l'équation $CX = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

5. Montrer que $A^2 = A$.

6. Calculer $B^2$ et $C^2$ sans utiliser leurs coefficients (une réponse qui fait apparaître un produit de matrices de taille 3 calculé par la méthode habituelle ne sera pas prise en compte).