Devoir maison 3

A rendre le au plus tard le 05/10/2021.

Exercice 1
On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère le sous ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ pour lesquelles les six nombres $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$ pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$ pour $j \in [\![1,3]\!]$ sont égaux. Autrement dit, les sommes des coefficients des lignes et celles des colonne est constante. Si $A \in E$, on note $d(A)$ cette valeur commune.

Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in E$ et $d(M) = 6$. De même $J \in E$ et $d(J) = 3$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que
$$A \in E \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ AJ = JA = \lambda J.$$
Interpréter le λ ainsi mis en évidence (qui est évidemment unique).
Indice : cette question est la plus importante de la partie I. Elle sera de ré-utilisation constante. On peut y penser comme une simplification (ou un réécriture) de la condition pour qu'une matrice A soit dans E (ie. la partie après la barre "telle que" dans la description de l'ensemble E). Essayer d'ailleurs d'écrire E sous la forme $E = \{\dots \mid \ \dots\}$
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application $d : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & d(A) \end{array} \right.$ est linéaire.
On note $F = \{A \in E;\ d(A) = 0\} = \ker(d)$ et $G =$Vect(J). Alors F et G sont des sous-espaces vectoriels de E
4. Soit $A \in E$. On pose $B = \frac{d(A)}{3}J$ et $C = A - B$. Les trois question suivantes sont **optionnelles**, mais intéressantes d'un point de vue manipulation formelle des matrices.
   (a) Exprimer J^2 en fonction de J.
   (b) Calculer BC et CB. Indice : nul besoin de coefficients pour ce calcul.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'expression de A^n en fonction de B^n et C^n (et seulement ces puissances...)
5. Montrer que $E = F \oplus G$.
6. Montrer que $\dim F = 4$. On pourra s'intéresser à la matrice du système définissant F (6 équations, 9 inconnues).
7. On note
$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que $(A_{22}, A_{23}, A_{32}, A_{33})$ est une base de F.
8. Calculer la dimension de E et en donner une base.
9. Les deux questions suivantes ne dépendent pas de la description de E que l'on vient de donner.
Montrer que le produit de deux matrices de E est encore dans E. Que vaut $d(AB)$ si $A, B \in E$?
10. Soit $A \in E \cap GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que $d(A) \neq 0$ puis que $A^{-1} \in E$.
Comparer $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

Indications :

1. Calculer d'abord sans aucune hypothèse AJ et JA pour une matrice quelconque A. Ensuite on peut raisonner et prouver l'équivalence demandée.
2. On pourra utiliser la question précédente
3. Analyser ce que vous venez de montrer...
4. (a) Il est possible de ne pas faire de calcul ici.
   (b)
   (c) Commencer par $n = 1$.
5. Pour montrer que $E = F + G$ (étape nécessaire ici, on ne connaît pas les dimensions de E ni F pour l'instant), on pourra utiliser les matrices de la question précédente.
6. Poser le système dont les inconnues sont les coefficients de A et échelonner...
7.
8. Utiliser le théorème de la base adaptée...
9. Utiliser la question 1
10. Utiliser la question précédente.