

Table des matières

I Fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n	1
I.1 Norme, distance	1
I.2 Continuité, dérivabilité	1
I.3 Taylor-Young	2
II Etude de courbes	3
II.1 Courbes dans \mathbb{R}^2	3
II.2 Domaine d'étude	3
II.3 Tangentes, variations	4
II.4 Tracé	5
II.5 Étude en un point	6
II.6 Branches infinies	6
II.7 Plan d'une étude	7

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n

En pratique, $n = 2$ ou 3 , mais cette distinction n'est pas vraiment nécessaire dans ce qui va suivre.

I.1 Norme, distance

I.1.1 Définition

Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $\langle X, Y \rangle$ ou $(X|Y)$) est

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

I.1.2 Proposition

- Le produit scalaire est symétrique ($\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$), bilinéaire, positif ($\langle X, X \rangle \geq 0$)

2. La norme vérifie :

- $\|X\| = 0 \iff X = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$
- $\| \|X\| - \|Y\| \| \leq \|X \pm Y\|$
- Pour $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \in \mathbb{R}^p$ et $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p$ $\left\| \sum_{i=1}^p \alpha_i X_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \|X_i\|$

Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire

I.2 Continuité, dérivabilité

I.2.1 Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \quad |t - a| \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leq \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a .

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I .

I.2.2 Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** f_1, \dots, f_n sont appelées applications coordonnées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = b \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = b_i$$

Preuve.

Pour $t \in I$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|f_i(t) - b_i| \leq \|f(t) - b\|$ (avec égalité ssi toutes les autres coordonnées de $f(t) - b$ sont nulles). Or $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} b \iff \|f(t) - b\| \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$.

Ainsi SI $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b$ ALORS $f_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} b_i$.

Réciproquement, observons que $\|f(t) - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i(t) - b_i)^2}$. Par compositions, somme puis composition (trouver les fonctions), si tous les $f_i(t) - b_i$ tendent vers 0 alors $\|f(t) - b\| \xrightarrow[t \rightarrow a]{} 0$. ■

I.2.3 Remarque

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale, f est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

I.2.4 Définition (Dérivabilité)

La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole \lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien défini dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R} - ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I , la fonction dérivée f' est à valeurs dans \mathbb{R}^n .

I.2.5 Cinématique

Si la fonction f étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors f' est le vecteur vitesse du mouvement.

I.2.6 Proposition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_n

le sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix}$. f est alors continue.

I.2.7 Exemple

$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ est dérivable sur \mathbb{R} . Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

I.2.8 Proposition

L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Preuve.

Le vérifier sur chaque coordonnée. ■

I.2.9 Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

- $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
- Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u}f$ est dérivable et $(\frac{1}{u}f)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
- $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
- $\langle f, g \rangle$ est dérivable et $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
- (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
- (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

I.2.10 Exemple

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de $\|f\|$.

I.3 Taylor-Young

I.3.1 Dérivées d'ordre supérieur

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les mêmes définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre k , de classe C^k pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n .

I.3.2 Combinaison linéaire, produit

Les formules de dérivée k -ième usuelles s'appliquent encore (avec les mêmes preuves) dans le cas d'une combinaison de fonctions $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et dans le cas du produit uf où $u \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

I.3.3 $o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation $o_a(1)$ représente une fonction (à valeurs dans \mathbb{R}^n) dont la limite en a est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n dont toutes les coordonnées sont des $o_a(1)$ (celui que l'on connaissait). Plus généralement si g est à valeurs réelles, $o_a(g)$ sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des $o_a(g)$ au sens habituel.

I.3.4 Théorème (Taylor-Young)
 Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a) \underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!} \underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \dots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

II.1.4 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{ \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \mid t \in I \}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ t \end{pmatrix}$?

II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer I . Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

II.2.1 Résumé des symétries connues

Notons $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et M' un autre point.

Coordonnées de M'	M' est le
$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Oy)
$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Ox)
$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à au point O
$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = x$
$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = -x$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	translaté de M par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

En règle générale, un schéma représentant les points M et M' permet de retrouver la symétrie.

II Etude de courbes

II.1 Courbes dans \mathbb{R}^2

II.1.1 Définition

Une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k dans \mathbb{R}^2 est une fonction $f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto M(t) \end{cases}$. Le

support de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M).

II.1.2 Exemple

Quel est le support de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ définie sur $[-\pi, \pi]$? Remarquer que la variable t n'apparaît pas graphiquement.

On note souvent $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions x et y mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

II.1.3 Définition

Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.2.2 Réduction du domaine d'étude

Notons $M(t)$ un point de la courbe $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Le principe de la réduction de domaine d'étude est de calculer les coordonnées de $M(\varphi(t))$ pour une fonction φ bien choisie de telle manière que $M(\varphi(t))$ est l'un des symétrique vu au point précédent. Si c'est le cas, on peut réduire le domaine d'étude puis compléter le tracer par la symétrie trouvée.

Donnons une liste non exhaustive des transformations classiques φ .

Forme de D	Point à calculer	Domaine réduit
Quelconque	$M(t + T)$	sur une période, souvent $D \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
centré en 0	$M(-t)$	$D \cap [0, +\infty[$
$[0, a]$	$M(a - t)$	$[0, \frac{a}{2}]$
$]0, +\infty[$	$M\frac{1}{t}$	$]0, 1]$

II.2.3 Exemple

Donnons un domaine d'étude de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} = M(t)$.

f est définie sur \mathbb{R} . Soit $t \in \mathbb{R}$.

- $M(t + 2\pi) = M(t)$ (ce n'est même pas une transformation, on retrouve exactement le même point).

Ainsi on peut étudier f sur $[-\pi, \pi]$ pour obtenir le support complet.

- $M(-t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à (Ox) . Ainsi on étudie f sur $[0, \pi]$ et on complètera le tracé par symétrie par rapport à (Ox) .

- $M(\pi - t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(2\pi - 2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à O . On étudie f par sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- Le calcul de $M(\frac{\pi}{2} - t)$ n'aboutit par à une des formes connues. On arrête la réduction de domaine.

II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se "dirige" vers la gauche ou la droite (x est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de y).

II.3.1 Etude des variations

Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour x et y , tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

II.3.2 Cordes

La corde passant par les points (distincts) $M(t)$ et $M(a)$ est dirigée par le vecteur unitaire $\frac{M(a)M(t)}{\|M(a)M(t)\|}$

II.3.3 Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons \vec{u}_- et \vec{u}_+ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \text{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \text{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs \vec{u}_- et \vec{u}_+ . Si ces droites sont confondues (\vec{u}_- et \vec{u}_+ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

II.3.4 Théorème

Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Preuve.

D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme, $\|f(t) - f(t_0)\| \sim |t - t_0| \|f'(t_0)\| \neq 0$. Ainsi $\frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} \sim \frac{1}{\|f'(t_0)\|} \frac{f(t) - f(t_0)}{|t - t_0|} \xrightarrow{t_0} \pm \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. ■

II.3.5 Exemple

Reprenons $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

f est clairement dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car ses deux fonctions coordonnées le sont. De plus, pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$x'(t) = -\sin(t) \text{ et } y'(t) = 2 \cos(2t)$$

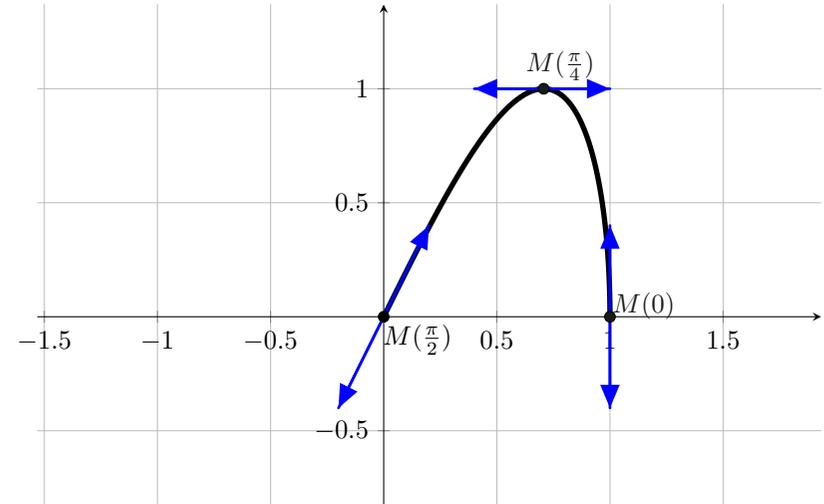
On en déduit le tableau de variations.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	\emptyset	-	
$x(t)$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$y(t)$	0	1	0
$y'(t)$	+	\emptyset	-

On remarque qu'en $t = 0$, la tangente est dirigée par $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$: elle est verticale.

De plus, en $t = \frac{\pi}{4}$ la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$: elle est horizontale.

Finalement, en $t = \frac{\pi}{2}$, la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.



On place ensuite les symétriques des 3 points et 3 tangentes par rapport à O pour obtenir le tracé sur $[0, \pi]$ (partie noire + rouge sur la figure). Ensuite on place les symétriques par rapport à (Ox) des 5 points et 5 tangentes pour obtenir le tracé final sur $[-\pi, \pi]$.

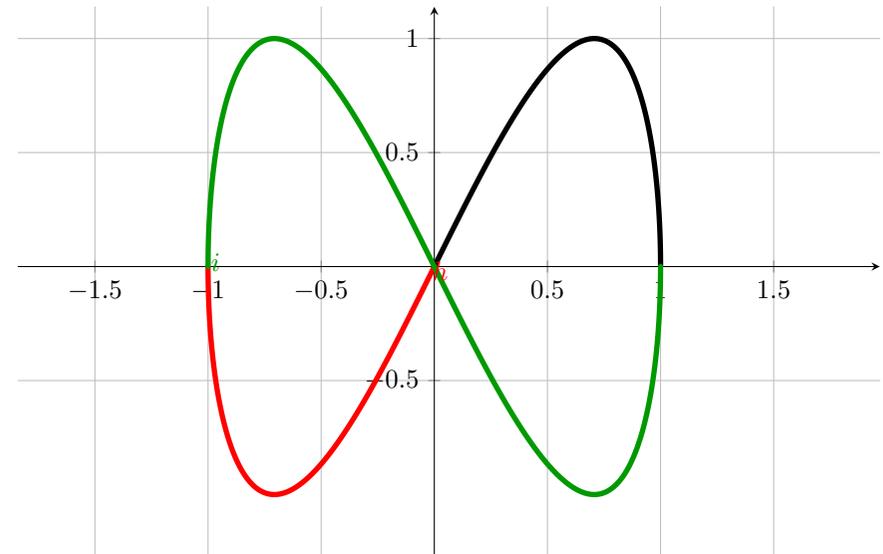
II.4 Tracé

II.4.1 Méthode

1. Placer tous les points étudiés dans la phase précédente, ainsi que les tangentes en ces points.
2. Tracer la courbe passant par ces points, tangente à ses tangentes. Le tracé doit respecter les variations.
3. Effectuer les symétries dans l'ordre inverse de leur découverte.

II.4.2 Exemple

Toujours pour la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$. On commence par tracer sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.



II.5 Étude en un point

Le cadre ici est d'étudier plus particulièrement l'allure de la courbe au voisinage du point $M(t_0)$ où t_0 est fixé. En particulier, on pourra trouver la tangente dans les cas des points singuliers.

II.5.1 Continuer à dériver

Le raisonnement du théorème II.3.4 s'étend sans difficulté cas le cas où $f'(t_0) = 0$ mais $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ pour un $p > 1$ (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus $q > p$ le plus petit entier tel que $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$ est libre.

Alors dans le repère $\mathcal{R}' = (M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$, les coordonnées de $M(t)$ (notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

c'est à dire que la courbe "suit" les directions d'abord de sa tangente (de direction \vec{u}_p) puis de \vec{u}_q .

Plus précisément, dans \mathcal{R}' on a plus sieurs cas :

- Si p est pair, alors α ne change pas de signe et donc on reste toujours du même côté de l'axe dirigé par \vec{u}_q .
- Si q est pair, alors β ne change pas de signe et donc la courbe reste toujours du même côté de sa tangente (qui est l'axe dirigé par \vec{u}_p).
- on adapte les raisonnements dans les cas impairs pour trouver les 4 cas du points suivant.

II.5.2 Cas général

Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas de la figure 1. p impair correspond à la première ligne, p paire à la seconde.

q pair correspond aux cas 1 et 4 (sur la diagonale).

II.5.3 Méthode

Pour étudier l'allure d'une courbe au voisinage d'un point de paramètre t_0 (par exemple un point singulier).

1. Trouver le plus petit entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. C'est un vecteur directeur de la tangente.
2. Trouver le plus petit entier $q > p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (on peut utiliser un déterminant) pour conclure sur l'allure.

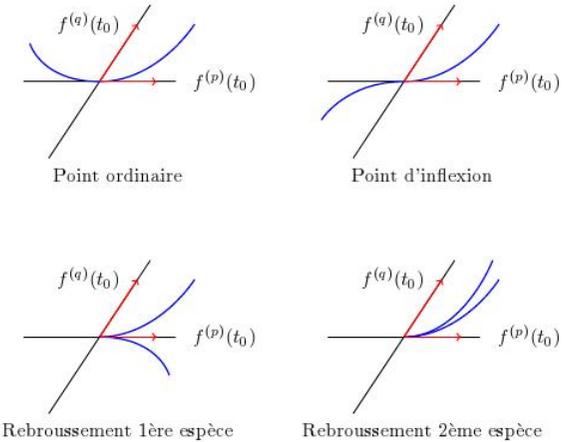


FIGURE 1 – Étude locale

II.5.4 Cas p=1, q=2

La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de "courbure".

II.5.5 En pratique

On peut tout à fait utiliser un développement limité de x et y pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

II.5.6 Exemple

Etudier la tangente au point de paramètre 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} \text{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix}$

Trouver en fonction de $k \in \mathbb{R}$ les éventuels points singuliers de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k \cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

II.6 Branches infinies

II.6.1 Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$ et $\lim_{t \rightarrow a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
 - (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox) .
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy) .
 - (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
 - i. si $\lim_{t \rightarrow a} (y(t) - \alpha x(t)) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f .
 - ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α .

II.6.2 Illustration

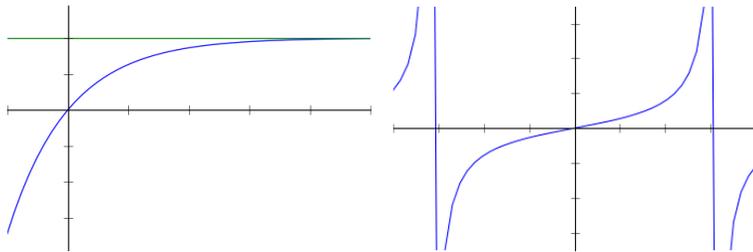


FIGURE 2 – Asymptotes

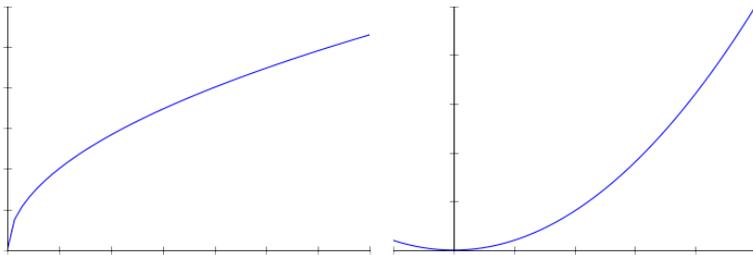


FIGURE 3 – Branches paraboliques

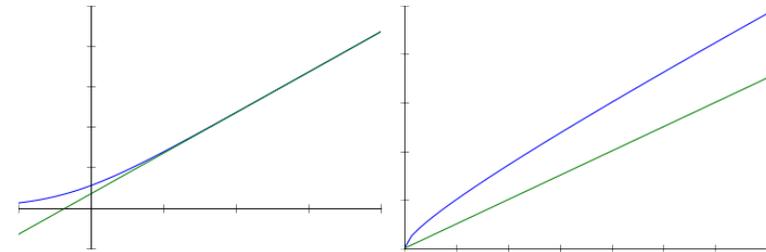


FIGURE 4 – Asymptote et branche parabolique obliques

II.6.3 Exemple

Etudier les branches infinies de $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.

II.7 Plan d'une étude

On pose $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ et on note x et y ses fonctions coordonnées.

1. Souvent, l'intervalle de définition de f ne sera pas donné. il faut alors commencer l'étude par déterminer le domaine de définition de la courbe.
2. Définir ensuite un domaine d'étude le plus restreint possible en utilisant les symétries des expressions pour x et y .
3. Déterminer les variations et les limites de x et y , et on résume ces informations dans un tableau de variations.
4. Exhiber les tangentes "intéressantes" ainsi que les points singuliers s'il y en a.
5. Etudier les branches infinies éventuelles.
6. Tracer la courbe en utilisant toutes les informations précédemment glanées.
7. Repérer s'il y a des points **multiples** (par lesquels la courbe passe plusieurs fois) et les déterminer en trouvant t_1, t_2 tels que
$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} .$$

Index

Taylor-young, 3