Table des matières

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

I.1 Norme, distance

Définition 1
Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $< X, Y >$ ou $(X|Y)$) est

$$< X, Y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

Proposition 1
1. Le produit scalaire est symétrique ($< X, Y >=< Y, X >$), bilinéaire, positif ($< X, X >\geqslant 0$)
2. La norme vérifie :
   - $\|X\| = 0 \iff X = 0$
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$
   - $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$
   - $|\|X\| - \|Y\|| \leqslant \|X \pm Y\|$
   - Pour $(\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{R}^p$ et $(X_i) \in (\mathbb{R}^n)^p$ $\left\|\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i X_i\right\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|\|X_i\|$

   Les trois dernières propriétés sont appelées inégalité triangulaire

I.2 Continuité, dérivabilité

Définition 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I\ |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

Proposition 2
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** $f_1, \dots, f_n$ sont appelées applications coordonnées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.

$$\lim_{t\to a} f(t) = b \iff \forall i \in [\![1, n]\!]\ \lim_{t\to a} f_i(t) = b_i$$

Définition 3 (Dérivabilité)
La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien défini dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R} - ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3
$f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. f est alors continue.

Proposition 4
L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition 5
Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

1. $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
2. Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u}f$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u}f\right)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $< f, g >$ est dérivable et $(< f, g >)' =< f', g > + < f, g' >$
5. (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

I.3 Taylor-Young

Théorème 1 (Taylor-Young)
Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)\underbrace{f'(a)}_{\text{vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!}\underbrace{f''(a)}_{\text{accélération}} + \cdots + \frac{(t-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

II Etude de courbes

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

Définition 4
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) \end{array}\right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble des points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

Définition 5
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.2 Domaine d'étude

II.3 Tangentes, variations

Définition 6
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

Théorème 2
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

II.4 Étude en un point

II.5 Branches infinies

Définition 7
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.