Réels et suites

Antoine Louatron

Table des matières

I Généralités sur les suites et rappels

I.1 Vocabulaire

I.1.1 Définition

Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = u(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

u_n est alors appelé terme général de la suite. n est alors le rang *de ce terme.*

On note naturellement l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On aura parfois à considérer des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et on notera $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} [\![n_0, +\infty]\!] & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}\right.$.

I.1.2 Remarque

On évitera de confondre $u = (u_n)_n$ qui est une suite et u_n son terme de rang n qui est un nombre.

I.1.3 Définition

Soit (u_n) une suite réelle

1. *On dit que $(u_n)_n$ est constante si $\exists a \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a$.*
   On dit que u_n est stationnaire si $\exists a \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N u_n = a$, c'est à dire si elle est constante à partir d'un certain rang
2. *On dit que $(u_n)_n$ est majorée si il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant M$. M est alors un majorant de la suite u.*
3. *On dit que $(u_n)_n$ est minorée si il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geqslant m$. m est alors un minorant de la suite u.*
4. *On dit que $(u_n)_n$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée. Il est équivalent de dire que $(|u_n|)_n$ est majorée.*
5. *On dit que $(u_n)_n$ est positive (resp négative) si elle est minorée (resp. majorée) par 0.*
6. *On dit que $(u_n)_n$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \geqslant u_n$ et décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leqslant u_n$. Si les inégalités en jeu sont strictes on parle respectivement de stricte croissance et stricte décroissance.*
7. *$(u_n)_n$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, et strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

I.1.4 A partir d'un certain rang

On dit qu'une propriété P portant sur (les indices d') une suite (u_n) est vraie à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

I.1.5 Suite définie explicitement

On a une relation de la forme $u_n = f(n)$ pour tout entier n. L'étude de la suite (monotonie, bornitude) se réduit à celle de la fonction. (dessin)

Montrons que la suite $u_n = \frac{n}{2^n}$ est décroissante à partir d'un certain rang via une étude de fonction.

I.1.6 Méthode

1. Pour prouver qu'une suite est bornée, on exhibe un majorant et un minorant. Il suffit d'ailleurs de prouver qu'elle est bornée à partir d'un certain rang.
   En effet si $\forall n \geqslant N\ |u_n| \leqslant M$ alors on pose $M' = \max\{u_0, \dots, u_{N-1}, M\}$ et alors $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leqslant M$
2. Pour prouver qu'une suite est monotone, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ou, SI $u_n > 0$, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

I.1.7 Exemple

Etudions la monotonie de la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{sh}(u_n)$.

I.2 Opérations sur les suites

I.2.1 Définition

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. On peut alors définir les suites $u+v$ et uv par $(u+v)_n = u_n + v_n$ et $(uv)_n = u_n v_n$ pour tout entier n. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on défini la suite λu par $\forall n \in \mathbb{N}\ (\lambda u)_n = \lambda u_n$.

Explication Ces définitions sont en fait les même que pour des fonctions quelconques à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.2.2 Remarque

On peut également définir l'inverse d'une suite de la même manière, en prenant bien garde à ne pas inverser 0. On se le permettra seulement dans le cas où on est assuré du signe strict de la suite étudiée.

II Suites usuelles

II.1 Relation de récurrence linéaire d'ordre 1

II.1.1 Définition
Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$.

1. *La suite de premier terme* u_0 *et définie par* $u_{n+1} = u_n + a$ *est appelée suite arithmétique de raison* a. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = u_0 + na$.
2. *La suite de premier terme* v_0 *et définie par* $v_{n+1} = q \times v_n$ *est appelée suite géométrique de raison* q. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = v_0 q^n$. *(avec la convention* $0^0 = 1$*)*

Explication Pour passer au terme suivant de u_n, on ajoute a. Si on a avancé de n termes on a donc ajouté na et donc $u_n = u_0 + na$.

Pour passer au terme suivant de v_n on multiple par q... Comparer ces raisonnement aux algorithmes de calcul de somme/produit en informatique.

II.1.2 Limites

Donner les limites quand $n \to +\infty$ des suites précédentes, en fonction de la valeur de la raison.

II.1.3 Monotonies

Etudier la monotonie suivant les valeurs des raisons.

II.1.4 Rappels

Avec les même notations que la définition précédente :

1. $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_n + ka = (n+1)u_0 + a\sum_{k=0}^n k = (n+1)u_0 + a\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Si $q \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n u_0 q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Pour calculer toute autre somme on se ramènera aux deux formules connues par factorisation ou changement d'indice.

II.1.5 Définition
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On dit que c'est une suite arithmético-géométrique si elle vérifie une relation de récurrence du type* $u_{n+1} = au_n + b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$

II.1.6 Etude

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique avec $a \neq 1$. On cherche $\alpha, c \in \mathbb{R}$ tels que $(u_n + c)_n$ soit géométrique de raison α.

$$u_{n+1} + c = \alpha(u_n + c) \iff au_n + b + c = \alpha u_n + \alpha c \iff (a - \alpha)u_n = \alpha c + -b - c$$

Il y a deux possibilité. Soit (u_n) est constante et alors $au_n + b = u_n$ donc $u_n = \frac{-b}{1-a}$ pour tout n. La deuxième possibilité est que $a = \alpha$ et donc $c(a-1) = b$ donc $c = \frac{-b}{1-a}$.

On a trouvé que (u_n) est constante ou alors $(u_n - \frac{b}{1-a})_n$ est géométrique de raison a.

II.1.7 Méthode

On cherche $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = ac + b$ (un "point fixe" de la relation de récurrence, ou encore une solution particulière constante) et on prouve que $(u_n - c)_n$ est géométrique de raison a.

II.1.8 Exercice
Trouver l'expression de la suite définie par $u_n = 2u_{n-1} - 1$ *et* $u_0 = -2$.

Expression en fonction de n *de la suite* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 3u_n - 1$ *pour tout* n.

II.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

II.2.1 Théorème
Suite récurrente linéaire d'ordre 2 Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls.

On pose $(E) : x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique de cette suite et r_1, r_2 ses racines complexes.

1. *Si $r_1 = r_2$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (\lambda n + \mu)r_1^n$*
2. *Si les racines sont distinctes alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.*

On détermine λ et μ en utilisant la relation aux rangs 0 et 1.

Preuve.
On s'intéresse aux suites qui vérifient une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (*) et de premiers termes u_0, u_1 donnés.

1. On cherche les suites géométriques solution de la relation de récurrence : $v_n = r^n$. On a alors $r^2 = ar + b$. Réciproquement si r est tel que $r^2 = ar + b$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ et donc la suite $(r^n)_n$ est solution de la relation.
2. Si l'équation $r^2 - ar - b = 0$ admet une racine double $r = \sqrt{-b} = \frac{a}{2}$, vérifions que la suite $(nr^n)_n$ est solution.
$$(n+2)r^{n+2} - a(n+1)r^{n+1} - bnr^n = n(r^{n+2} - ar^{n+1} - br^n) + 2r^{n+2} - ar^{n+1} = 0 + r^{n+1}(2r - a) = 0.$$
3. Si $(w_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient $(*)$ alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on la suite $(\alpha w_n + \beta v_n)_n$ aussi.
4. Soit $(u_n)_n$ une solution de $(*)$ de premiers termes u_0, u_1. Soient de plus $(v_n), (w_n)$ deux solutions distinctes de $(*)$ de la forme r^n ou nr^n. Alors on peut trouver α, β tels que $u_0 = \alpha v_0 + \beta w_0$ et $u_1 = \alpha v_1 + \beta w_1$.
   Notons $d = v_0 w_1 - v_1 w_0$ le déterminant de la matrice associée au système précédent d'inconnues $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Il s'agit traiter deux cas.
   — Si $r_1 \neq r_2$, alors $d = 1 \times r_2 - r_1 \times 1 \neq 0$
   — Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors $d = 1 \times r - r \times 0 = r \neq 0$ car a et b sont non tous les deux nuls.
   Dans tous les cas, le système considéré est associé à une matrice inversible donc possède une unique solution.
   Or deux suites vérifiant $(*)$ et coïncidant sur leurs deux premiers termes sont égales. Donc $u_n = \alpha v_n + \beta w_n$
   ■

II.2.2 Exemple
Déterminer l'expression de la suite $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, u_0 = u_1 = 2$.

III Nombre réels

III.1 Majorants, minorants

III.1.1 Définition
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. *On dit que A est majorée si elle admet un majorant $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall a \in A$ $a \leqslant M$.*
2. *On dit que A est minorée si elle admet un minorant $m \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall a \in A$ $a \geqslant m$.*
3. *A est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée ou encore si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall a \in A$ $|a| \leqslant M$.*

Explication m et M doivent être des nombres fixés et ne dépendre d'aucun paramètre du problème étudié.

III.1.2 Exemple
$\mathbb{R}$ n'est pas majoré ni minoré, pas plus que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Par contre $\mathbb{N}$ est minoré mais toujours pas majoré.

$[0, 1]$ est borné.

III.1.3 Définition-Proposition
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est LE maximum de A si il vérifie :

1. *$M \in A$.*

2. M est un majorant de A.

On remarquera l'unicité d'un tel maximum, quand il existe.

Exo : énoncer une proposition similaire pour le minimum

Preuve.
Si M et M' sont des maxima de A, alors $M \leqslant M'$ car $M \in A$ et $M' \leqslant M$ car $M' \in A$. Finalement $M = M'$. ∎

III.1.4 Remarque

En règle général, une partie majorée de $\mathbb{R}$ n'a pas de maximum, et une partie minorée n'a pas de minimum. Par exemple $]0,1[$ n'a ni minimum ni maximum tout en étant bornée. $\mathbb{Q}_+^*$ n'a pas de minimum tout en étant minorée.

> **III.1.5 Théorème**
> *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$, d'ailleurs) possède un maximum.*

III.2 Bornes supérieures et inférieures

III.2.1 Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. *Si A est majoré, on appelle borne supérieure le plus petit des majorants de A quand il existe. On la note* $\sup A$.
2. *Si A est minoré, on appelle borne inférieure le plus grand des minorants de A quand il existe. On la note* $\inf A$.

III.2.2 Remarque

1. A priori, rien n'assure l'existence d'une borne supérieure, même si A est majoré.
2. Si elle existe, la borne supérieure est unique, car c'est un minimum.
3. Si A admet un maximum, alors c'est aussi la borne sup. On a le diagramme sans réciproque :

$$M = \max A \Rightarrow M = \sup A \Rightarrow M \text{ majore } A$$

III.2.3 Exemple

Posons $U = \{\frac{1}{n} | \ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite des inverses des entiers naturels non nuls. Que peut-on en dire en terme de bornes sup et inf ?

> **III.2.4 Théorème (Axiome)**
> *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

> **III.2.5 Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)**
> *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Si M est un majorant de A alors*
>
> $$M = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ a > M - \varepsilon$$
>
> *Soit $m \in \mathbb{R}$. Si m est un minorant de A alors*
>
> $$m = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ a < m + \varepsilon$$

Preuve.
On fait la preuve pour la borne supérieure.

— Si $M = \sup A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $M - \varepsilon < M$ donc ce n'est pas un majorant de A, ce qui s'écrit :

$$\text{Non}(\forall a \in A \ a \leqslant M - \varepsilon) \text{ie} \exists a \in A \ a > M - \varepsilon.$$

— Réciproquement on suppose que $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A\ a > M - \varepsilon$.
Si M' est un majorant de A tel que $M > M'$, on pose $\varepsilon = M - M' > 0$ et alors on a $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon = M - (M - M') = M'$ ce qui contredit le fait que M' est un majorant. On en conclut que tous les majorants de A sont $\geqslant M$ qui se trouve donc être le minimum de ces majorants. ■

III.2.6 Exercice
Donner lorsqu'elles existent les bornes supérieures et inférieures des ensembles :

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} | n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \right\}, B = \{2 + (-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$$

III.3 Intervalle de $\mathbb{R}$

III.3.1 Définition
Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme (pour $a, b \in R$)

— $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leqslant x \leqslant b\}$. *C'est le segment* $[a, b]$. .
— $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leqslant x < b\}$ *noté* $[a, b[$. *L'intervalle est dit semi-ouvert à droite.*
— $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leqslant b\}$ *noté* $]a, b]$. *L'intervalle est dit semi-ouvert à gauche.*
— $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$ *noté* $]a, b[$. *L'intervalle est dit ouvert.*
— $\{x \in \mathbb{R} |\ a \leqslant x\}$ *noté* $[a, +\infty[$.
— $\{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$ *noté* $]a, +\infty[$.
— $\{x \in \mathbb{R} |\ x \leqslant b\}$ *noté* $] - \infty, b]$.
— $\{x \in \mathbb{R} |\ xwb\}$ *noté* $] - \infty, b[$.
— $\mathbb{R}$ *noté* $] - \infty, +\infty[$.

On remarque que $\emptyset$ est un intervalle, il suffit de prendre $a > b$.
Si I est un intervalle on note $\overline{I}$ le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$: $I \cup \{a, b\}$.

III.3.2 Remarque

On a les deux caractérisation suivantes évidentes mais parfois très pratiques ($x, a, \varepsilon \in \mathbb{R}$)

1. $|x| \leqslant a \iff x \leqslant a$ et $-x \leqslant a \iff x \in [-a, a]$.
2. $|x - a| \leqslant \varepsilon \iff a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$

III.3.3 Proposition
Soit $I = (a, b)$ un intervalle (ouvert ou fermé) non vide et non réduit à un point. Soit $x \in]a, b[$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$.

Preuve.
On a $a \leqslant x \leqslant b$ et $x \neq a, b$ donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $a < x - \varepsilon$ (prendre $\frac{x-a}{2}$ si $a \in \mathbb{R}$) et $\varepsilon_2 > 0$ tel que $x + \varepsilon_2 < b$.
Ainsi si on pose $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ alors $a < x - \varepsilon < x + \varepsilon < b$ donc $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$. ■

III.3.4 Proposition
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. X est un intervalle ssi $\forall a, b \in X\ [a, b] \subset X$ (ou $[b, a] \subset X$)

Preuve.
L'idée est qu'un intervalle est un ensemble "sans trou" (on dit connexe).
Avec notre définition d'intervalle, il faut faire une preuve pour chacun des 9 cas.pour le sens direct (si X est un intervalle...) ce qui est assez simple bien que fastidieux.
Réciproquement, supposons que $\forall a, b \in X\ [a, b] \subset X$ (ou $[b, a] \subset X$) et montrons que X est un intervalle.
On pose $\alpha = \sup(X) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta = \inf(X) \in \overline{\mathbb{R}}$. On va montrer que X est un intervalle de bornes α et β. il y a 4 cas à traiter suivant l'appartenance de ces bornes à X ou non.
Traitons le cas $\alpha \notin X$ et $\beta \in X$. Les autres sont similaires. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < x \leqslant \beta$. Comme $\alpha < x$ et que α est la borne inférieure de X il existe au moins un élement a de X tel que $a < x$ (sinon x serait un minorant de X ce qui n'est pas, il est strictement plus grand que le plus grand des minorants).
Alors $[a, \beta] \subset X$ par hypothèse et donc $x \in X$. CQFD. ■

III.4 Partie entière

III.4.1 Proposition
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$.

Preuve.

- Unicité. Si n et n' conviennent alors $n \leqslant x < n+1$ et $n' \leqslant x \leqslant n'+1$. La deuxième inégalité est équivalente à $-n'-1 < -x \leqslant -n'$ et donc en sommant on obtient.
$$n - n' - 1 < 0 < n - n' + 1$$
L'entier $n - n'$ est strictement compris entre -1 et 1 et est donc nul.
- Existence.
  1. Si $x = 0$, alors $n = 0$ convient.
  2. Si $x > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > x$. Ainsi l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} | k > x\}$ est non vide et donc possède un minimum, noté k_0. On a alors $k_0 > x$ et $k_0 - 1 \leqslant x$ car $k_0 - 1 \notin A$. Alors $n = k_0 - 1$ convient.
  3. Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et soit N tel que $N \leqslant -x < N+1$. On a donc un entier tel que
  $$-N - 1 < x \leqslant -N$$
  Si $x = -N$, alors $n = -N$ convient, sinon $n = -N-1$ convient. ∎

III.4.2 Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier de la proposition précédente est appelé partie entière de x. On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. La partie fractionnaire de x est le réel $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

III.4.3 Exemple
$\lfloor 2.8 \rfloor = 2$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, $\lfloor -5.1 \rfloor = -6$.

III.4.4 Remarque

La partie entière de x est le plus grand entier inférieur à x. $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieure à x.

III.4.5 Exercice
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

III.4.6 Proposition
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *$x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$. La partie entière est une fonction croissante.*
2. *Si $n \in \mathbb{Z}$., $E(x+n) = n + E(x)$*
3. *$x \in Z \iff x = E(x)$.*

Preuve.
Les deux derniers points sont immédiats. Pour le premier point on commence par remarquer que $E(x) \leqslant y$ car $x \leqslant y$. De plus, $E(y)$ est le plus grand entier inférieur à y donc $E(x) \leqslant E(y)$. ∎

III.4.7 Approximation rationnelle

Le but ici est de montrer que "$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$", c'est à dire qu'étant donné un réel on peut trouver un rationnel aussi près que souhaité de ce réel.

On va même montrer un résultat plus fort, à savoir que $\mathbb{D}$ (l'ensemble des nombres décimaux) est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Alors par définition de la partie entière on a

$$\lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x \rfloor + 1 \text{ ie. } x_n \leqslant x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Ainsi $0 \leqslant x - x_n < \frac{1}{10^n}$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors $|x - x_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et *a fortiori* $\mathbb{Q}$ aussi.

III.4.8 Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le décimal $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé approximation décimale (ou rationnelle) par défaut à 10^{-n} près de x et $x_n + \frac{1}{10^n}$ est l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près.

III.4.9 Coin Culture

$0,999999999\cdots = 1$. En effet, $0,999999\cdots = 0 + 9 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-2} + \ldots$.

Or $9\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10}\sum_{0}^{n-1} \left(10^{-1}\right)^k = \frac{9}{10}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 9\frac{1-10^{-n}}{10-1} = 1 - 10^{-n}$.