Devoir maison n°5

A rendre le 19/10.

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}^2$ (le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$), on considère le point $\Omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit N un point du cercle de centre Ω et de rayon 1.
   (a) Montrer qu'il existe $t \in [-\pi, \pi]$ tel que $N = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
   (b) Déterminer, quand il existe, l'orthocentre H du triangle $(O\Omega N)$. Rappel : il s'agit du point d'intersection des hauteurs.
   On exprimera les coordonnées de H en fonction du paramètre t de la question précédente.
2. On note Γ le lieu de ces orthocentres. Nous avons obtenu une première paramétrisation de Γ à la question précédente (c'est à dire une expression de Γ comme support d'une courbe paramétrée).
   (a) Pour $t \in]-\pi, \pi[$, on pose $u = \tan \frac{t}{2}$. Montrer que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$.
   (b) Montrer que l'on peut paramétrer Γ par $x(u) = \frac{2}{u^2+1}$ et $y(u) = \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}$.
   Il s'agit de montrer que $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, un point du plan, vérifie $M \in \Gamma \iff \exists u \in \ldots \ x = x(u)$ et $y = y(u)$.
3. Etudier la courbe Γ sous la forme précédente, puis tracer.

Indications

1. (a) Similaire au cours
   (b) Les 3 hauteurs sont forcément concourantes. On cherche H comme l'intersection de deux d'entre elles. On pourra donner des équations des hauteurs choisies, sachant qu'on connaît forcément un point et un vecteur normal.
2. (a) Révision sur les formules trigonométriques.
   (b) Attention au raisonnement pour garantir le $\iff$ demandé.
3. On trouve un cas particulier ici, car $M(u)$ possède une limite lorsque $u \to +\infty$. Pour étudier la tangente, on admet que si f' possède une limite quand $u \to +\infty$, alors il s'agit d'un vecteur directeur de la tangente cherchée.