Devoir maison n°6

A rendre le 09/11.

Exercice 1

Dans cette exercice, n désigne un entier naturel non nul. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+x-1=0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Rappeler les valeurs de $\lambda_1+\lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$.
2. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_2^n$ et calculer sa somme. La réponse ne fera pas apparaître de racine carrée au dénominateur.
3. Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée $n$ième du produit de deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$.
4. Quelle est la classe de f ? Sur quel domaine ?
5. En utilisant la relation $(x^2+x-1)f(x)=1$, montrer que pour tout x dans un ensemble à préciser,
$$(x^2+x-1)f^{(n)}(x)+n(2x+1)f^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$
dans le cas où $n\geqslant 2$.
6. Pour $p\in\mathbb{N}$, on pose $u_p=\frac{f^{(p)}(0)}{p!}$.
   (a) Que valent u_0 et u_1 ?
   (b) Montrer que si $p\geqslant 2$ alors $u_p=u_{p-1}+u_{p-2}$.
   (c) En remarquant que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente d'ordre 2, exprimer u_p en fonction de l'entier p, λ_1 et λ_2.
7. Donner le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 en utilisant le théorème de Taylor-Young.
8. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :
$$\frac{1}{x^2+x-1}=\frac{\alpha}{x-\lambda_1}+\frac{\beta}{x-\lambda_2}$$
   (b) Soit $a\in\mathbb{R}^*$ un réel non nul. En factorisant le dénominateur par a, écrire $\frac{1}{x-a}$ sous forme d'une somme de série entière de la variable x. On précisera pour quels valeurs de x cette écriture est valable.
   (c) En déduire une expression de $f(x)$ comme somme d'une série entière, en précisant pour quelles valeurs de x cette écriture est valable.
   (d) Retrouver le résultat de la question 6c

Indications

1. Relations coefficients-racines.
2. Il s'agit d'une série d'un genre connu.
3.
4. La preuve se fait par opération(s), en soignant la rédaction.
5. Utiliser la question 3.
6. (a) Calcul direct

   (b) Évaluer et diviser judicieusement la relation de la question 5

   (c) Attention ! L'équation caractéristique n'est pas l'équation de la question 1, mais il y a tout de même un lien avec λ_1, λ_2.
7. Simple application
8. (a) Rappel : on peut multiplier par $x - \lambda_1$ puis évaluer (remplacer x par une valeur bien choisie). Idem avec λ_2.

   (b) Même technique que pour les DL finalement. On prendra bien garde au signe de a pour le domaine de validité.

   (c) Il faut pouvoir écrire les 2 sommes des séries précédentes, donc on prend $x \in \ldots$.

   (d)