I Généralités sur les suites et rappels

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = u(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

u_n est alors appelé terme général de la suite. n est alors le rang *de ce terme.*

On note naturellement l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On aura parfois à considérer des suites définies à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et on notera $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ l'application $\left\{\begin{array}{ccc} [\![n_0, +\infty]\!] & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}\right.$.

Définition 2
Soit (u_n) une suite réelle

1. *On dit que $(u_n)_n$ est constante si $\exists a \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}\ u_n = a$.*
   On dit que u_n est stationnaire si $\exists a \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N u_n = a$, c'est à dire si elle est constante à partir d'un certain rang
2. *On dit que $(u_n)_n$ est majorée si il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant M$. M est alors un majorant de la suite u.*
3. *On dit que $(u_n)_n$ est minorée si il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \geqslant m$. m est alors un minorant de la suite u.*
4. *On dit que $(u_n)_n$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée. Il est équivalent de dire que $(|u_n|)_n$ est majorée.*
5. *On dit que $(u_n)_n$ est positive (resp négative) si elle est minorée (resp. majorée) par 0.*
6. *On dit que $(u_n)_n$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \geqslant u_n$ et décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leqslant u_n$. Si les inégalités en jeu sont strictes on parle respectivement de stricte croissance et stricte décroissance.*
7. *$(u_n)_n$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante, et strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

I.2 Opérations sur les suites

Définition 3
Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. On peut alors définir les suites $u + v$ et uv par $(u + v)_n = u_n + v_n$ et $(uv)_n = u_n v_n$ pour tout entier n. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on défini la suite λu par $\forall n \in \mathbb{N}\ (\lambda u)_n = \lambda u_n$.

II Suites usuelles

II.1 Relation de récurrence linéaire d'ordre 1

Définition 4
Soit $u_0, v_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$.

1. *La suite de premier terme u_0 et définie par $u_{n+1} = u_n + a$ est appelée suite arithmétique de raison a. On a $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = u_0 + na$.*
2. *La suite de premier terme v_0 et définie par $v_{n+1} = q \times v_n$ est appelée suite géométrique de raison q. On a $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = v_0 q^n$. (avec la convention $0^0 = 1$)*

Définition 5
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que c'est une suite arithmético-géométrique si elle vérifie une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

II.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème 1
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la donnée de $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls.

On pose $(E) : x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique de cette suite et r_1, r_2 ses racines complexes.

1. *Si $r_1 = r_2$ alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (\lambda n + \mu) r_1^n$*
2. *Si les racines sont distinctes alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.*

III Nombre réels

III.1 Majorants, minorants

Définition 6
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. *On dit que A est majorée si elle admet un majorant $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A\ a \leqslant M$.*
2. *On dit que A est minorée si elle admet un minorant $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A\ a \geqslant m$.*
3. *A est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée ou encore si il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall a \in A\ |a| \leqslant M$.*

Définition-Proposition 1
Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est LE maximum de A si il vérifie :

1. *$M \in A$.*
2. *M est un majorant de A.*

On remarquera l'unicité d'un tel maximum, quand il existe.

Exo : énoncer une proposition similaire pour le minimum

Théorème 2
Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}$, d'ailleurs) possède un maximum.

III.2 Bornes supérieures et inférieures

Définition 7
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. *Si A est majoré, on appelle borne supérieure le plus petit des majorants de A quand il existe. On la note $\sup A$.*
2. *Si A est minoré, on appelle borne inférieure le plus grand des minorants de A quand il existe. On la note $\inf A$.*

Théorème 3 (Axiome)
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1 (Caractérisation de la borne supérieure)
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Si M est un majorant de A alors

$$M = \sup A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ a > M - \varepsilon$$

Soit $m \in \mathbb{R}$. Si m est un minorant de A alors

$$m = \inf A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ a < m + \varepsilon$$

III.3 Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 8
Un intervalle est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme (pour $a, b \in R$)

— $\{x \in \mathbb{R} | \ a \leqslant x \leqslant b\}$. *C'est le segment $[a, b]$. .*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ a \leqslant x < b\}$ *noté $[a, b[$. L'intervalle est dit semi-ouvert à droite.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ a < x \leqslant b\}$ *noté $]a, b]$. L'intervalle est dit semi-ouvert à gauche.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ a < x < b\}$ *noté $]a, b[$. L'intervalle est dit ouvert.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ a \leqslant x\}$ *noté $[a, +\infty[$.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ a < x\}$ *noté $]a, +\infty[$.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ x \leqslant b\}$ *noté $] - \infty, b]$.*
— $\{x \in \mathbb{R} | \ xwb\}$ *noté $] - \infty, b[$.*
— $\mathbb{R}$ *noté $] - \infty, +\infty[$.*

On remarque que $\emptyset$ est un intervalle, il suffit de prendre $a > b$.

Si I est un intervalle on note $\overline{I}$ le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$: $I \cup \{a, b\}$.

Proposition 2
Soit $I = (a, b)$ un intervalle (ouvert ou fermé) non vide et non réduit à un point. Soit $x \in]a, b[$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$.

Proposition 3
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. X est un intervalle ssi $\forall a, b \in X \ [a, b] \subset X$ (ou $[b, a] \subset X$)

III.4 Partie entière

Proposition 4
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

Définition 9
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier de la proposition précédente est appelé partie entière de x. On la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$. La partie fractionnaire de x est le réel $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

Proposition 5
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. *$x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$. La partie entière est une fonction croissante.*
2. *Si $n \in \mathbb{Z}$., $E(x + n) = n + E(x)$*
3. *$x \in Z \iff x = E(x)$.*

Définition 10
Soit $x \in \mathbb{R}$. Le décimal $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé approximation décimale (ou rationnelle) par défaut à 10^{-n} près de x et $x_n + \frac{1}{10^n}$ est l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près.