Exercice 1
Assurez-vous de savoir prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (par exemple $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ x - 3y = 0\}$) et qu'une fonction donnée est une application linéaire (par exemple $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\pi) \end{array} \right.$)

Exercice 2
On croise différents types d'objets en algèbre linéaire, et le vocabulaire qui s'y rapporte est précis. Compléter le tableau suivant par des ✓ou ✗ suivant que le mot peut s'appliquer ou non au type d'objet correspondant.

	Matrice	famille	espace vectoriel	application linéaire
Rang				
Trace				
Dimension				
Libre				
Stable				
Déterminant				

Exercice 3
On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit également $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Suivant la colonne du tableau à suivre, on considère que M est la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ ou alors la matrice de f, à chaque fois dans la base $\mathcal{B}$. Compléter les deux colonnes vides (éventuellement par ✗) par l'interprétation pour l'objet correspondant à la colonne de chaque propriété de la matrice M.

Pour la matrice M	Pour la famille $(u_1, \dots u_n)$	Pour l'application f
$M \in GL_n(\mathbb{K})$		
$\mathrm{rg}(M)$		
$\det(M)$		
$\mathrm{tr}(M)$		
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(M)$		
M^2		

Exercice 4
On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(X^2, (X-1)^2, (X-2)^2)$ est libre dans E.

Exercice 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Rappeler la définition sous forme d'ensemble de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On veut obtenir $\ker(f) = \{\dots\}$.
2. [1] On note $h = f \circ g$. Montrer que $\ker(g) \subset \ker(h)$.
3. Question facultative : à quelle condition (portant sur les noyaux et images de f et g) a-t-on $\ker(h) = \ker(g)$?
4. On suppose dans cette question que $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.

1. Rappel : dans le cas général, pour montrer l'inclusion d'ensembles $A \subset B$, on pose $x \in A$ et on montre que $x \in B$ en utilisant l'hypothèse que $x \in A$.