Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner le développement en série entière, en précisant pour quelles valeurs de x les formules sont valables, pour $e^x, \sin(x), \frac{1}{1-x}, (1+x)^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé et n'est pas un entier naturel)
2. Retrouver le développement en série entière de arctan en précisant le théorème utilisé ainsi que le domaine de convergence.
3. On considère les deux fonction $x : t \mapsto \mathrm{ch}(t)$ et $y : t \mapsto \mathrm{sh}(t)$. Étudier la branche infinie de $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ lorsque $t \to +\infty$. Illustrer le résultat par un schéma
4. On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 1+t^3 \end{pmatrix}$. Étudier l'allure de la courbe au point de paramètre $t = 0$ et tracer la tangente ainsi que l'allure de la courbe sur un schéma (on attend ici une conclusion parmi : point ordinaire, point d'inflexion, point de rebroussement de première ou deuxième espèce).

Exercice 2

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \end{array} \right.$$

et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1). \end{array} \right.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On admet (voir le cours) que φ est linéaire.
2. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ en faisant apparaître les calculs intermédiaires.
3. L'application f est elle injective ? surjective ?
4. Calculer le déterminant et la trace de f.
5. Déterminer un base de $\ker(\varphi)$. L'application φ est-elle injective ? surjective ?
6. Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1) = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. Calculer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$. Préciser les calculs. [1]
8. Que peut-on dire *a priori* sur $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$ par rapport à $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$? Vérifier que c'est bien le cas !
9. Plus difficile : combinons les applications.
   (a) Montrer par récurrence (détaillée) que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \forall n \in \mathbb{N} f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$
   (b) Montrer, en citant correctement le résultat utilisé, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int\limits_0^1 P(t) \mathrm{d}t$

Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On considère alors la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos(\theta) \\ y(\theta) = \theta\sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $M(\theta)$ le point de Γ de paramètre θ.

1. (a) Donner la forme trigonométrique (ou exponentielle) de l'affixe complexe $z(\theta)$ de $M(\theta)$.

1. Si M est compliquée, vous vous êtes fourvoyé.

(b) Calculer la dérivée sur $[0, 2\pi]$ de la fonction $\theta \mapsto z(\theta)$.

(c) En déduire la valeur de $\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) \right\|$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et préciser quels sont les points réguliers de Γ.

2. On considère la fonction f définie sur $D = [0, 2\pi] \backslash \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, par $f(\theta) = \tan(\theta) + \theta$.

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) Démontrer que f s'annule exactement 3 fois sur D en θ_0, θ_2 et θ_4 vérifiant $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.

(c) En déduire les points de Γ admettant une tangente horizontale.
On admet qu'il existe uniquement 2 points $M(\theta_1)$ et $M(\theta_3)$ de Γ admettant une tangente verticale.

3. Tracé de Γ
On donne $\theta_1 \approx 0,86$ et $\cos(\theta_1) \approx 0,65$, $\theta_2 \approx 2,03$ et $\cos(\theta_2) \approx -0,44$,
$\theta_3 \approx 3,43$ et $\cos(\theta_3) \approx -0,96$, $\theta_4 \approx 4,91$ et $\cos(\theta_4) \approx 0,20$.

(a) En utilisant les données ci-dessus, proposer une construction du point $M(\theta_4)$ sachant que l'on dispose uniquement d'une règle graduée, d'un compas et d'une équerre.

(b) Sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet, placer avec précision les points $M(\theta)$ pour $\theta = \theta_0, \theta_1, \theta_2, , \theta_3, , \theta_4, \frac{\pi}{2}$ avec leur tangente ainsi que les points $M(\theta)$ pour $\theta = \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π.
On utilisera une unité de 2cm.

(c) Finir le tracé et placer le point $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

4. On note Δ la partie du plan délimitée par la courbe Γ et le segment $[M(0), M(2\pi)]$. L'objectif de cette question est d'en calculer l'aire notée $\mathcal{A}$.
Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on note $\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{\imath} + \sin(\theta)\vec{\jmath}$ et $D(R)$ le disque de centre O et de rayon $R \geqslant 0$.
Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on note $t_k = \frac{2k\pi}{n}$.

(a) Justifier que l'aire $\mathcal{A}_k(R)$ de la partie $D_k(R)$ de $D(R)$ comprise entre les deux demi-droites d'origine O et dirigée par les vecteurs $\vec{u}(t_k)$ et $\vec{u}(t_{k+1})$ vaut $\frac{\pi}{n}R^2$.

(b) On note $\mathcal{A}_k$ l'aire de la partie Δ_k de Δ comprise entre les deux mêmes demi-droites.
Trouver R_1 et R_2 tels que $D_k(R_1) \subset \Delta_k \subset D_k(R_2)$ et en déduire que $\frac{4\pi^3}{n^3}k^2 \leqslant \mathcal{A}_k \leqslant \frac{4\pi^3}{n^3}(k+1)^2$.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel N, $\sum\limits_{p=0}^{N} p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

(d) En déduire que $\frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+1)$ puis la valeur de $\mathcal{A}$.

5. L'objectif de cette question est d'utiliser la courbe Γ pour construire un segment ayant pour longueur le périmètre du cercle de centre O et passant par le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Calculer rapidement le périmètre du cercle considéré ici.

(b) La tangente à Γ en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ coupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la longueur du segment $[ON]$.

(c) Indiquer comment construire un point N_1 tel que le segment $[ON_1]$ réponde au problème.

6. L'objectif de cette question est d'utiliser la courbe Γ pour construire un angle dont la mesure est $\frac{\theta}{3}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ est fixé, en utilisant uniquement une règle (non graduée) et un compas.
On admet que ces deux instruments permettent de tracer des droites et des cercles, de reporter des longueurs, de tracer une droite passant par un point fixé et parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

(a) Soient A et B deux points du plan. À l'aide du théorème de Thalès, indiquer une construction à la règle et au compas d'un point C appartenant au segment $[AB]$ vérifiant $AC = \frac{1}{3}AB$.

(b) Utiliser cette construction (les parallèles et perpendiculaires pouvant ici être tracées avec une équerre) pour placer sur le dessin de la question 3 le point $M\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ et l'angle $\frac{4\pi}{9}$. On pourra commencer par construire le point P de la demi-droite d'origine O et passant par $M\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ tel que $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Exercice 4
Dans cet exercice, nous allons essayer de déterminer des conditions pour que deux matrices soient semblables.

Partie I : un exemple

On note $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = 2A - I_2$ où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B. Ainsi $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille 2, on note $P_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ (que l'on appelle polynôme caractéristique de M).

1. Calculer les polynômes P_A et P_B et préciser leurs racines (éventuellement complexes). On portera une attention particulière au facteur $\frac{1}{5}$ apparaissant dans l'expression de A.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.
3. En considérant une base adaptée à $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, montrer que A est semblable à $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B est semblable à $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Rappel : deux matrices associées à un même endomorphisme (mais calculées dans deux bases différentes) sont semblables.
4. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Partie II : cas général

Nous allons, dans le cas général, essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices carrées de taille 2 soient semblables.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice carrée quelconque, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On pose également l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ canoniquement associé à A.

1. Dans cette question, nous allons établir quelques résultats utiles pour la suite.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, semblable à A. Montrer que $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$ et $\det(B) = \det(A)$.
   (b) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblable à A, et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ semblable à B. Montrer que A et C sont semblables.
   (c) Montrer que $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   (d) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha \neq \beta$. On suppose de plus que l'on dispose de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
2. Cas des homothéties. On suppose, **dans cette question seulement**, que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice d'homothétie, c'est à dire $A = \lambda I_2$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (a) Soit B une matrice semblable à A. Donner les coefficients de B.
   (b) Calculer P_A et donner ses racines en fonction de λ.
3. Cas de racines distinctes. On suppose dans la question 3 que P_A possède deux racines distinctes α et β. En particulier A **n'est pas** une matrice d'homothétie.
   (a) Rappeler le lien entre $\operatorname{tr}(A), \det(A)$ (des coefficients de P_A) et α, β. À quelle condition sur $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$ a-t-on bien $\alpha \neq \beta$?
   (b) Montrer que $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0$.
   (c) En déduire que $A - \alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont **pas** inversibles.
   (d) Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$.
   (e) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (f) Montrer que si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$ alors A et B sont semblables.
4. On suppose dans cette question que A n'est pas une matrice d'homothétie et que P_A possède une racine double qui vaut donc $\alpha = -\frac{\operatorname{tr}(A)}{2}$.
   (a) On montre, comme à la question 3, que $(A - \alpha I_2)^2 = 0$ et $A - \alpha I_2 \neq 0$. On pose $M = A - \alpha I_2$. Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$.
   (b) On pose $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$ et $v = Mu$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
   (c) En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
   (d) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que B est semblable à A si, et seulement si, B n'est pas une matrice d'homothétie et $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(B)$.