Applications directes

Exercice 1

1. *Montrer que les poins* $E = (-1, 2, 1)$, $F = (1, 2, 4)$ *et* $G = (5, 2, 10)$ *sont alignés.*
2. *Montrer que les points* $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (2, 0, 0)$, $D = (3, -1, 1)$ *sont coplanaires.*

Exercice 2

Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire de taille 3.

Bases orthonormées

Exercice 3

On se place dans $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ *un ROND de référence qui sera le même pour toute la feuille de TD.*

Soient $\vec{u} = \frac{6\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+3\vec{k}}{7}, \vec{v} = \frac{3\vec{\imath}+6\vec{\jmath}+\alpha\vec{k}}{7}, \vec{w} = \frac{\beta\vec{\imath}+\gamma\vec{\jmath}+\delta\vec{k}}{7}$ *avec* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

1. *Trouver les réels* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *tels que la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *soit orthonormée directe.*
2. *On considère le point* $A : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{R}$. *Calculer les coordonnées* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *de* A *dans* $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

   Astuce : on pourra penser à un produit scalaire.

Droites et plans

Exercice 4

On pose $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = A + \mathrm{Vect}(\vec{u})$

1. *Trouver une équation et une base du plan* $\mathcal{P}$ *contenant* $\mathcal{D}$ *et le point* $B : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. *On donnera une base* $(\vec{v}, \vec{w})$ *de* $\mathcal{P}$ *telle que* $(\vec{\imath}, \vec{v}, \vec{w})$ *soit directe.*
2. *Trouver un système d'équation de* $\mathcal{D}$.
3. *Calculer l'intersection de* $\mathcal{P}$ *avec* $\mathcal{D}' = (Oz)$.

Exercice 5

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. *On considère* $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x + \lambda z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ *et* $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ -x + z = 3 \end{cases}$. *Trouver tous les* λ *qui font que l'intersection de ces droites soit non vide.*

Sphères

Exercice 6

Soient A, B *deux points distincts de l'espace. On appelle plan médiateur de* $[AB]$ *l'ensemble des points à égale distance de* A *et* B. *C'est le plan passant par le milieu de* $[AB]$ *et orthogonal à ce segment.*

On pose maintenant $A : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $C : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer une équation des plans médiateurs de* $[OA], [OB], [OC]$.
2. *Montrer que ces trois plans se coupent en 1 point dont on précisera les coordonnées.*
3. *Trouver une équation de la sphère circonscrite à* $OABC$.

Exercice 7

Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de $M : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *sur* $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ *et les coordonnées du projeté orthogonal de* M *sur* $\mathcal{P} : 3x + 2y - z - 5 = 0$.

Donner l'intersection de $\mathcal{P}$ *et de la sphère de centre* O *et de rayon* 2.