Devoir maison n°7

A rendre le 23/11.

Exercice 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si f est un endomorphisme de E, id_E sera noté f^0, f sera noté f^1, $f \circ f$ sera noté $f^2, \ldots$ ainsi pour p entier strictement positif, $f^{p+1} = f \circ f^p = f^2 \circ f^{p-1} = \cdots = f^p \circ f$.

Le but du problème est d'étudier quelques exemples et de montrer que lorsque E est de dimension finie n, avec n au moins égal à 2, alors pour tout endormorphisme de E il existe un entier p compris entre 1 et n tel que

$$E = \mathrm{Im}(f^p) \oplus \ker(f^p) \tag{1}$$

Premier exemple

$E = \mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (-x + y, y - z, y - z)$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f. Peut-on choisir $p = 1$?
2. Pour $(x, y, z) \in E$, calculer $f^2(x, y, z)$; Déterminer le noyau et l'image de f^2.
   Peut-on choisir $p = 2$?
3. Déterminer f^3. Que remarque-t-on ? Que peut-on dire du noyau et de l'image de f^3 ?

Deuxième exemple

$E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit f l'application définie par $\forall P \in E\ f(P) = P'$.

1. Montrer que f définit un endomorphisme de E.
2. Calculer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Sont-ils supplémentaires dans E ?
3. Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1)

Cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

1. Si f est un automorphisme de E quels sont les entiers p vérifiant (1) ?
   On suppose maintenant que l'endomorphisme f n'est pas bijectif, et on note pour $k \in \mathbb{N}$: $K_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ et $d_k = \dim(K_k)$.
2. Vérifier que pour tout k, on a $K_k \subset K_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
3. Que peut-on dire de la suite (d_k) ? En déduire qu'il existe un entier k strictement positif tel que $K_k = K_{k+1}$. On note p le plus petit entier strictement positif vérifiant cette égalité. Vérifier que $p \leqslant n$.
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ K_{p+k} = K_p$.
5. A l'aide du théorème du rang, montrer que $I_{p+1} = I_p$ et $\forall k \in \mathbb{N}\ I_{p+k} = I_p$.
6. Montrer que K_p et I_p sont supplémentaires dans E.

Troisième exemple : facultatif

$E = \mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E définit par $\forall (x, y, z) \in E\ f(x, y, z) = (x - z, -x - 2y + 3z, -y + z)$.

1. Déterminer un vecteur ε_1 tel que $f(\varepsilon_1) = 0$, puis déterminer un vecteur ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$, puis déterminer un vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.
2. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
3. Déterminer $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ puis des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ que l'on exprimera à l'aide des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Peut-on choisir $p = 1$?
4. Etudier de la même façon f^2 et f^3 pour en déduire la valeur de l'entier p.

Indications

Premier exemple

1. On justifiera qu'on ne peut pas prendre $p = 1$, c'est à dire que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ ne sont pas supplémentaires dans E.
2. Cette fois on peut prendre $p = 2$. A justifier.
3. On peut exprimer f^3 en fonction de f^2.

Deuxième exemple

1.
2. Conclure sur p.
3. Il faut calculer noyau et image de f^2, f^3... jusqu'à trouver deux espaces supplémentaires. Rappelons que $\{0_E\} \oplus E = E$.

Cas général

1. Tous ?
2. Très classique. On s'applique pour montrer l'inclusion : soit $x \in K_k$. Montrons que $x \in K_{k+1}$. Or on sait que $x \in K_k$ et donc....

   Idem pour les images.
3. Un théorème qui peut être utile : une suite strictement croissante d'entier naturels ne peut pas être majorée (elle est forcément minorée par 0).

   Deuxièe version : si une suite d'entier naturels est croissante et majorée, alors elle n'est pas strictement croissante.

   On peut même démontrer (mais c'est inutile ici) qu'une suite croissante et majorée d'entier naturel stationne (fini par prendre toujours la même valeur).
4. p est maintenant fixé par la question précédente. Récurrence sur k.
5. Facile.
6. Il s'agit d'étudier l'intersection. On pourra utiliser le fait que $K_{2p} = K_p$.