Devoir surveillé n°5

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Cours)

1. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+\ln(1+x)}$.
2. Est-ce que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ est inversible ?
3. Donner une équation de la droite du plan $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Sur un même schéma, tracer les courbes représentatives de $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto \frac{1}{x^2}, x \mapsto \frac{1}{x^3}$ avec une légende lisible.

Exercice 2

On considère dans cet exercice la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$.

1. Donner sans justification un tableau de variations complet de f. Tracer la courbe représentative ainsi que la tangente en 1.
2. Montrer que f est une bijection et qu'elle est sa propre réciproque.
3. Que peut-on déduire sur la courbe représentative de f ?
4. Calculer une équation de T_2, la tangente à la courbe de f en au point d'abscisse 2 ainsi qu'une équation de $T_{\frac{1}{2}}$, la tangente en $\frac{1}{2}$.
5. Calculer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.
6. Soit $a > 0$.
   (a) Donner une équation de T_a la tangente à la courbe de f en a, sous forme d'équation de droite du plan.
   (b) En déduire une équation de $T_{\frac{1}{a}}$.
   (c) A quelle(s) condition(s) sur a les droites T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ se coupent en un point ?
   (d) Déterminer l'intersection des droites T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ quand elles se coupent en un point. On le note M_a et on donnera les coordonnées de M_a.
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
7. On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{x^2+1} \end{array} \right.$.
   (a) Calculer l'ensemble image de g (rappel : il s'agit de l'ensemble des valeurs que prend la fonction g).
   (b) On pose $E = \{M_a | a \in \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $E = \{M_a |\ a \in [1, +\infty[\} = \{M_a |\ a \in]0, 1]\}$.
   (c) Montrer que E est le segment semi-ouvert $]OA]$ où $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
8. Expliquer rapidement (une justification précise n'est pas attendue) pourquoi les tangentes T_a et $T_{\frac{1}{a}}$ se coupent forcément sur la droite d'équation $y = x$ sans utiliser les coordonnées de M_a.

Exercice 3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Notons également $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) | AM = MA\}$ le commutant de A et $C(T) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) |\ TM = MT\}$ le commutant de T.

1. Trouver deux matrices de $C(A)$.
2. Montrer que A est inversible puis que $A^{-1} \in C(A)$. On ne calculera pas la matrice A^{-1}.
3. Etude de la "structure" de $C(A)$.
   (a) Montrer que $C(A)$ est stable par combinaison linéaire, c'est à dire que si $M_1, M_2 \in C(A)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in C(A)$.
   (b) Rappeler la définition de $\text{Vect}(I_3, A, A^{-1})$ et montrer que $\text{Vect}(I_3, A, A^{-1}) \subset C(A)$.

(c) Montrer qu'on a également $\mathrm{Vect}(I_3, A, A^2) \subset C(A)$.

(d) Montrer que $C(A)$ est stable par produit matriciel, c'est à dire qu'un produit d'éléments de $C(A)$ est encore dans $C(A)$.

4. Comparer AP et PT.
5. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence : $M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(T)$.
7. Montrer que les éléments de $C(T)$ sont exactement les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ où a, e, f sont réels.
8. En déduire l'ensemble $C(A)$ comme $\mathrm{Vect}(J, K, L)$ où J, K, L sont 3 matrices (fixes) que l'on précisera.
9. Prouver que si $\alpha J + \beta K + \gamma L = 0$ alors on a nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. (On dit alors que J, K, L forment une famille libre, ou encore sont non coplanaires, d'après le chapitre de géométrie de l'espace.)
10. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^n = \alpha_n J + \beta_n K + \gamma_n L$
11. Prouver l'unicité des coefficients obtenus dans la question précédente.
12. Que dire du cas $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$?

Exercice 4

Soit $\alpha \in]0, +\infty[$.

On pose $f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \end{array} \right.$ et $g_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) - x^\alpha \end{array} \right.$.

Le but de cet exercice est d'étudier les fonctions f_α et g_α dans le but d'étudier les valeurs et positions relatives des fonction ln et puissance α

Partie I : valeurs relatives

1. Rappeler la limite de f_α en $+\infty$ et calculer sa limite en 0.
2. Montrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Etudier les variations de f_α.
4. Montrer que f_α possède un maximum et calculer la valeur de ce maximum, que l'on note m_α.
5. Etudier les limites de m_α quand $\alpha \to 0$ et quand $\alpha \to +\infty$.
6. Pour quelles valeurs de α a-t-on au moins une fois $\ln(x) \geqslant 1000x^\alpha$? (c'est à dire pour au moins une valeur de $x > 0$).
7. Cas particulier : $\alpha = \frac{1}{3}$

(a) Donner un développement limité à l'ordre 2 de $f_{\frac{1}{3}}$ au voisinage de 1.

(b) Quels renseignements graphique en tirer ?

(c) Tracer la courbe représentative de $f_{\frac{1}{3}}$. On prendra $e^1 \approx 3$. Le repère pourra ne par être orthonormé à condition d'être orthogonal.

Partie II : positions relatives

1. Quelles est la classe de la fonction g_α sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Etudier les limites de g_α en 0 et $+\infty$.
3. Donner un tableau de variations complet de g_α.
4. Montrer que g_α possède un maximum noté M_α.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de α a-t-on $M_\alpha = 0$? Quelle est l'interprétation en terme de positions relatives des courbes représentatives des fonction ln et $x \mapsto x^\alpha$?
6. Etudier les variations et le signe de $h : x \mapsto -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$ définie sur un ensemble à préciser.
7. Donner les limites de h en 0 et $+\infty$.
8. Tracer la courbe représentative de h.
9. Quelle est la fonction puissance dont la courbe représentative s'approche le moins de la courbe de ln ? On mesure la distance par la valeur absolue de la différence des ordonnées pour une même abscisse.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On pose $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by = 0$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ et un vecteur normal $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$ qui soient de norme 1.
2. Soit $M : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un point et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Montrer que $\overrightarrow{OM}.\vec{u} = \overrightarrow{OH}.\vec{u}$ et calculer de manière similaire $\det(\overrightarrow{OM}, \vec{u})$.
3. Montrer qu'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{OM} = c\vec{u} + d\vec{n}$.
4. Exprimer c, d en fonction de $\overrightarrow{OM}, \vec{u}, \vec{n}$ et trouver une autre expression de $c\vec{u}$ et $d\vec{n}$.
5. Donner les coordonnées de H.
6. En considérant M et H comme des colonnes, trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $H = AM$. Que remarquer sur la matrice A ?
7. Montrer que $S = 2A - I_2$ vérifie $S \in GL_2(\mathbb{R})$ et $S^{-1} = {}^tS = S$.