Table des matières

I Etude métrique

I.1 Longueur d'une courbe

Définition 1
Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ entre les points a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| \mathrm{d}t$.

I.2 Abscisse curviligne

Définition 2
Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \mathrm{d}u \end{array} \right.$.

A retenir : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|f'\|$ et lorsque cela a du sens, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}$.

Proposition 1
On considère une courbe régulière f de classe $\mathcal{C}^k$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

Interprétation : on peut, dans le cas d'une courbe régulière, repérer un point de la trajectoire non plus par l'instant où on y passe mais par la distance (algébrique) à l'origine fixée. En effet tout point est à une distance donnée (surjectivité) et à une distance donnée correspond un seul point (injectivité).

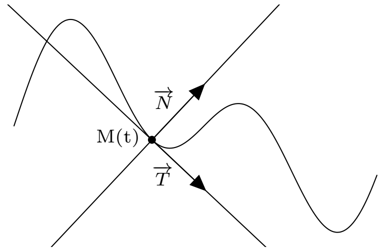
De plus, on ne change pas la classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe paramétrée si on choisi d'utiliser l'abscisse curviligne d'origine t_0 pour paramétrer (repérer les points).

Proposition 2
Pour une courbe régulière f, on a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\|f'\|}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. C'est un vecteur directeur unitaire de la tangente pour chaque paramètre.

I.3 Repère de Frenet

Définition 3
Soit $t \in I$. On note $\overrightarrow{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t) et $\overrightarrow{N}(t)$ (vecteur unitaire normal de f en t) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{T}(t)$.

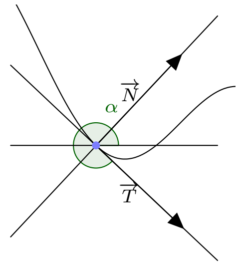
Le repère $(f(t), \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est appelé repère de Frenet de f en t.



Théorème 1 (Détermination angulaire)
Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \ \overrightarrow{T}(t) = \cos(\alpha(t))\vec{\imath} + \sin(\alpha(t))\vec{\jmath}.$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{T}(t)$.



Proposition 3
1. On a alors $\overrightarrow{N(t)} = -\sin\alpha(t)\vec{\imath} + \cos\alpha(t)\vec{\jmath}$
2. Comme $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$, on en déduit que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left(= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right) = \cos\alpha$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

I.4 Courbure

Définition 4
On appelle courbure la dérivée de la fonction α par rapport à s :

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$$

Comme α est un angle, il n'a pas d'unité. γ s'exprime donc en m^{-1}.

Théorème 2 (Formules de Frenet)
On a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}$$

II Enveloppe, développée

II.1 Courbe développée

Définition 5
Un point d'une courbe paramétrée est dit birégulier ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

Proposition 4
Pour une courbe $\mathcal{C}^2$, le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 6
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\overrightarrow{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s.

Définition 7
Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto C(t)$.

II.2 Enveloppe

Définition 8
Soit $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t\in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto M(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

Proposition 5
Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.