Devoir maison n°7

A rendre le 30/11.

Exercice 1
On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré n ou moins.

On pose également $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par φ. On pose maintenant $\varphi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si P possède une racine dans $\mathbb{C}$ et que $P \in \ker(\varphi_n)$ alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
   En déduire $\ker(\varphi_n)$ et $\ker(\varphi)$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. φ_n est-elle surjective ?
5. Montrer que φ est surjective.
6. Montrer que $\mathcal{B}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ où $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = \frac{1}{k!} \prod\limits_{i=0}^{k-1} (X - i)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
7. Donner la matrice de φ_3 dans $\mathcal{B}_3$.
8. On cherche maintenant à résoudre l'équation $\varphi(P) = X^3$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
   (a) Justifier qu'il existe plusieurs solutions à notre équation et quelles sont dans $\mathbb{K}_4[X]$.
   (b) Montrer que si Q_1, Q_2 vérifient $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2)$ alors $Q_1 - Q_2$ est un polynôme constant.
   (c) Trouver la solutions de l'équation $\varphi(P) = X^3$ ayant un coefficient constant nul. On note Q cette solution.
   (d) En remarquant que pour $k \in \mathbb{N}$ on a $k^3 = Q(k+1) - Q(k)$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{N} k^3$ pour un entier $N \geqslant 1$.
9. Question bonus : calculer $\varphi(P_k)$ en fonction des éléments de $\mathcal{B}_n$ (en reprenant les notations de la question 6). On fixe maintenant $p \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Donner une procédure de calcul de $\sum\limits_{k=1}^{N} k^p$.

Indications

1.
2.
3. Aller réviser le théorème de d'Alembert-Gauss, dans votre cours sur les polynômes. On trouve $\ker(\varphi) = \mathbb{K}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$ l'ensemble des polynômes constants.
4. On trouve facilement une famille génératrice. N'hésitez pas à développer avec Newton et bien observer s'il y a une annulation dans la différence.
5.
6. La liberté est facile avec un argument classique.
7. La matrice obtenue est de taille 4 et doit être diagonale.
8. (a) La question 4 doit nous aider.
   (b) Cette fois il s'agit de la question 3.
   (c) Chercher les 4 coefficients inconnus de P.
   (d) La somme a une forme particulière. Factoriser l'expression obtenue.
9. On pourra parler de matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_n$ pour une valeur de n bien choisie.