

## Révisions

### Exercice 1

On pose  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et  $F = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ . Montrer (sans raisonnement géométrique) que  $F$  est un espace vectoriel.

Cette fois géométriquement, que peut-on dire de  $F$  ?

### Exercice 2

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $u = (-1, 1, 0)$ ,  $v = (2, 0, 1)$ ,  $w = (1, 1, 1)$ . Donner une base, la dimension et un supplémentaire de  $F = \text{Vect}(u, v, w)$ .

### Exercice 3

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P - (1 + X)P' \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est linéaire et donner des bases de  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 4

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .

## Manipulations d'espaces

### Exercice 5

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer :  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

### Exercice 6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . On considère  $H_1, H_2$  deux hyperplans de  $E$ .

Que dire de la dimension de  $H_1 \cap H_2$  ?

### Exercice 7

Vrai ou Faux ?

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. (non nécessairement de dimension finie), et  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$ .

1.  $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .
2.  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$ .
3.  $\text{Im}g \subset \text{Im}(g \circ f)$ .
4.  $\ker(g \circ f) \subset \ker f$ .
5.  $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ .

6.  $\text{Im} f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$ .

7.  $\text{Im} f \cap \ker f = f(\ker f^2)$ .

8. Si  $f$  est injective, alors  $f$  est bijective.

9.  $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im} f$ .

## Familles libres et génératrices

### Exercice 8

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme non nul de  $E$  (espace de dimension  $n$ ). On suppose qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que  $f^p = 0$  et on prend  $p$  le plus petit possible ie.  $f^{p-1} \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.
2. Montrer que  $f^n = 0$ .

### Exercice 9

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $f_n : x \mapsto \cos(nx)$  et  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Montrer que  $(f_n)_{n \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  est une famille libre de  $E$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Qu'en déduire sur l'espace  $E$  ?

*Indication* : on pourra procéder par récurrence et utiliser la dérivation.

### Exercice 10

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de  $E$ .

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  transforme toute famille libre de  $E$  en une famille libre de  $F$
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de  $E$  transformée par  $f$  en une famille génératrice de  $F$

### Exercice 11

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que

pour tout  $x \in E$ ,  $(x, u(x))$  est une famille liée.

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$ .

1. Montrer qu'il existe  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$  tels que  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
2. En considérant  $e_i + e_j$ , montrer que  $\lambda_i = \lambda_j$  pour  $i \neq j$ .
3. Donner l'ensemble des endomorphismes  $u$  vérifiant la propriété de l'énoncé.
4. Quels sont les matrices  $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent avec toutes les autres matrices ?  
On introduira  $u$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$  et on utilisera l'hypothèse de commutation sur des projecteurs bien choisis.

## Sommes directes

### Exercice 12

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n \geq 1$ , et  $F_1$  et  $F_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$  tel que :  $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

### Exercice 13

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note  $F_1 = \ker(f)$ ,  $F_2 = \ker(f - Id_E)$ ,  $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$ .

1. Montrer que l'on a la somme directe  $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que  $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ . Montrer que  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ .
3. En notant  $r_i$  la dimension de  $F_i$ , donner la matrice de  $f$  dans une base adaptée à la somme précédente.

## Projections, symétries

### Exercice 14

On se place dans  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  la base canonique et  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $D_u = \text{Vect}(u)$  et  $D_v = \text{Vect}(v)$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^2$ .
2. On note  $p$  le projecteur sur  $D_u$  parallèlement à  $D_v$ , et  $s$  la symétrie associée. Pour  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , calculer  $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et en déduire la matrice de  $p$  dans  $\mathcal{B}$ . Même question pour  $s$
3. Calculer les matrices de  $p$  et  $s$  dans  $\mathcal{B}' = (u, v)$

### Exercice 15

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ .

1. Calculer  $A^2$ . Qu'en déduire pour  $f$ ?
2. Donner une base de  $\ker(f)$  et une base de  $\text{Im}(f)$  puis la matrice de  $f$  dans une base adaptée à  $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$ .

### Exercice 16

Soient  $E, F$  2  $\mathbb{K}$ -ev. Soient de plus  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  telles que  $u \circ v = Id_F$ . Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (projecteur sur quel espace, parallèlement à quel autre?).

### Exercice 17

1. On considère  $T : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{cases}$ . Montrer que  $T$  est une symétrie et en déduire que les ensembles des matrices symétriques et anti-symétriques sont des espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. On pose  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & f \circ \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{cases} \end{cases}$$

est une symétrie. Qu'en déduire ?

### Exercice 18

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur.

Montrer que  $u \circ p = p \circ u$  si et seulement si  $\ker(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont stables par  $u$ .