Table des matières

Motivation

Matrices diagonales

Les produits et puissances de matrices sont beaucoup plus aisés sur les matrices diagonales.

Endomorphismes

Nous avons constaté que certains endomorphismes ont une matrice diagonale pour un bon choix de base $\mathcal{B}$.

Traduction sur la base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base de E. On suppose que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Traduisons cette hypothèse : $f(u) = 2u, f(v) = -v$ et $f(w) = 3w$.

Noyaux

Poursuivons notre analyse de la situation précédente.

On a u qui vérifie $f(u) - 2(u) = 0_E$ ie $(f - 2Id_E)(u) = 0_E$. Or u fait partie d'une famille libre donc est non nul. Ainsi $\ker(f - 2Id_E) \neq \{0_E\}$, ou encore l'endomorphisme $f - 2Id_E$ n'est pas bijectif.

De même $f + Id_E$ et $f - 3Id_E$ ne sont pas bijectifs.

I Elements propres

I.1 Valeurs propres

I.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi il existe un $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

I.1.2 Exemple

On prend $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f' \in \mathcal{L}(E)$. Trouvons les valeurs propres de D. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On se demande s'il existe une fonction f qui n'est pas la fonction nulle telle que $D(f) = \lambda f$ ou encore $f' = \lambda f$.

La réponse est oui, par exemple $t \mapsto e^{\lambda t}$. On connaît même toutes les solutions : $t \mapsto Ke^{\lambda t}$ où $K \in \mathbb{R}^*$.

Conclusion : tout réel est valeur propre de D ou encore $Sp(D) = \mathbb{R}$

I.1.3 Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé.

Trouver les valeurs propres de f. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche s'il y a une solution non nulle $X \in \mathbb{R}^2$ à l'équation $f(X) = \lambda X$ ie $AX = \lambda X$. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

Un système linéaire homogène possède une solution non nulle ssi sa matrice n'est pas inversible. Ainsi λ est une valeur propre ssi $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ssi $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ssi $(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ssi $(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$.

Finalement, les valeurs propres de f sont 1 et 3, $Sp(f) = \{1, 3\}$

I.1.4 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$$

Preuve.
Pour $x \in E$ on a $f(x) = \lambda x \iff f(x) - \lambda x = 0_E \iff x \in \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f)$.

Ainsi il existe un tel x non nul ssi $\ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ ∎

I.2 Espaces propres

I.2.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de E. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$.

Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à λ. On le note parfois aussi E_λ.

I.2.2 Éléments propres

Les éléments propres d'un endomorphisme sont : ses valeurs propres et les espaces propres associés.

I.2.3 Noyau

f est injective ssi 0 n'est pas valeur propre de f. De manière plus générale, λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective.

I.2.4 Exemple
On reprend l'exemple I.1.3. Calculons $E_1(f)$ et $E_3(f)$.

D'après notre analyse, $X \in E_1(f) \iff AX = X$. On trouve le système $x + y = 0$ dont l'ensemble des solutions est Vect $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $E_1(f) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On résout de même $AX = 3X$. On obtient le système $-x + y = 0$. Ainsi $E_3(f) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (famille libre de 2 vecteurs. Elle est en plus orthogonale et indirecte). De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

I.2.5 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_p$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose v_i un vecteur propre associé à λ_i (il est donc non nul).

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Preuve.

— Le cap $p = 1$ est trivial (une famille de 1 vecteur est libre ssi le vecteur est non nul)

— Supposons le théorème vrai pour p valeurs propres distinctes.
Prennons $p+1$ vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i v_i = 0_E \tag{1}$$

En composant par f on obtient

$$\sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i \lambda_i v_i = 0_E \tag{2}$$

En calculant $(1) - \lambda_{p+1}(2)$ on obtient $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{p+1})v_i = 0_E$.

Or, par hypothèse de récurrence, la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre. Ainsi pour $i \in [\![1, p]\!]$ on a $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{p+1}) = 0$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_{p+1}$, on a $\alpha_i = 0$.

Il reste à voir que $\alpha_{p+1}v_{p+1} = 0_E$ avec $v_{p+1} \neq 0_E$ (la moindre des choses pour un vecteur propre !). Finalement, la famille $(v_1, \dots, v_{p+1})$ est libre.

— Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, p vecteurs propres associés à p valeurs propres distinctes deux à deux forment une famille libre. ∎

I.2.6 Exemple
La famille $(t \mapsto e^{\lambda t})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre car toute sous famille finie est libre.

I.2.7 Exercice
Montrer que $(\cos(n.))_{n \in \mathbb{N}}$ *est libre.*

I.2.8 En dimension finie

Si $\dim(E) = n$, un endomorphisme de E ne peut pas avoir plus de n valeurs propres.

I.2.9 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_k$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f.

La somme $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ est directe ie $\sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

Preuve.
Soient $(u_1, u_2 \dots, u_k) \in \prod_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0_E$. On doit montrer que tous les u_i sont nuls. Or des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre d'après le résultat précédent. Ainsi une somme de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ne peut être nulle. On en déduit qu'aucun des u_i n'est un vecteur propre et qu'ils sont donc tous nuls. ∎

I.2.10 Exemple
Soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ et D une droite non contenue dans F. Alors $F \oplus D = \mathbb{R}^3$.

Soit p le projecteur sur F parallèlement à D. On a $F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - Id) = E_1$ et $G = \ker(p) = E_0$ et on a bien $E_1 \oplus E_0 = E_1 + E_0$.

I.3 Stabilité ($\star$)

I.3.1 Droites stables

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons qu'on ait $f(D) \subset D$ pour une droite D ie. que la droite D est stable par f.

Notons $D = \mathrm{Vect}(u)$ pour un $u \neq 0_E$ (qui dirige D). Alors $f(u) \in D$ donc $f(u) = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. On a même $D \subset E_\lambda(f)$.

I.3.2 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Preuve.
Soit $x \in E_\lambda(f)$. Alors $f(x) = \lambda x$ par définition et donc $f(x) \in E_\lambda(f)$ (stabilité par produit par un scalaire). ∎

I.3.3 Endomorphisme induit

Dans le cadre de la proposition, on note $g : \left\{ \begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & \to & E_\lambda(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ .La restriction de l'ensemble d'arrivé a du sens d'après la proposition précédente.

Pour tout $x \in E_\lambda(f)$ on a $g(x) = f(x) = \lambda x$. Ainsi $g = \lambda Id_{E_\lambda(f)}$.

En résumé : la restriction d'une application linéaire à un espace propre est une homothétie.

Si E est de dimension finie, on peut trouver F un supplémentaire de E_λ et la matrice de f est alors de la forme $\begin{pmatrix} \lambda I_p & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

I.3.4 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
2. Tout espace propre de f est stable par g.

Evidemment, on peut échanger les rôles de f et g dans ces résultats.

Preuve.

1. Soit $x \in \ker(f)$. Montrons que $g(x) \in \ker(f)$. Or $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$. Donc $g(x) \in \ker(f)$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Notons $y = f(x)$. Alors $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f)$.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $g \circ (f - \lambda Id_E) = (f - \lambda Id_E) \circ g$ donc $\ker(f - \lambda Id_E)$ est stable par g d'après le point précédent. ∎

I.3.5 Droites propres

Toujours dans le cadre $f \circ g = g \circ f$, tout droite propre de f est aussi une droite propre pour g.

II En dimension finie

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

II.1 Extension aux matrices

II.1.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A ssi il existe un $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. Un tel X **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

En résumé : les valeurs propres et vecteurs propres de A sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A, $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

On note $Sp(A) = Sp(f_A)$ le spectre de A (l'ensemble de ses valeurs propres) et les espaces propres sont notés $E_\lambda(A)$.

II.1.2 Traduction

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$.

1. $X \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de A associé à λ ssi $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
2. $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - A) = \{X \in \mathbb{K}^n | \; AX = \lambda X\}$

II.1.3 Remarque

Si λ est une valeur propre de A, alors $\dim(E_\lambda) = n - \mathrm{rg}(\lambda I_n - A) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

II.1.4 Exemple

Vérifier que 0 est une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ et calculer $E_0(A)$.

II.2 Polynôme caractéristique

II.2.1 Définition-Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme χ_A associée à la fonction $\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(xI_n - A) \end{array} \right.$.

χ_A est un polynôme **unitaire** (son coefficient dominant est 1) de **degré** n, la taille de A.

Preuve.
On doit prouver que $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est polynomiale de degré n et unitaire. Notons $E_1, \dots E_n$ les colonnes de I_n

Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on pose P_p la propriété : pour $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$, $f_p : x \mapsto \det(xE_1 - C_1, \dots, xE_p - C_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)$ est une fonction polynomiale de degré au plus p et le coefficient de x^p est $\det(E_1, \dots, E_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)$.

Pour nos calculs, fixons $x \in \mathbb{K}$

— $f_1(x) = \det(xE_1 - C_1, -C_2, \dots, -C_n) = x \det(E_1, -C_2, \dots, -C_n) + \det(-A)$ qui est bien degré au plus 1 et le coefficient de x^1 est $\det(E_1, -C_2, \dots, -C_n)$.

— Supposons P_p vérifiée pour un $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$f_{p+1}(x) = x \underbrace{\det(xE_1 - C_1, \dots, xE_P - C_p, E_{p+1}, -C_{p+2} \dots, -C_n)}_{g(x)} + \underbrace{\det(xE_1 - C_1, \dots, xE_P - C_p, -C_{p+1}, \dots, -C_n)}_{h(x)}.$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chacun des deux déterminants (avec deux familles de colonnes différentes) : g et h sont polynomiale de degré au plus p donc f_{p+1} est de degré au plus $p+1$ et le coefficient de x^{p+1} est le coefficient de x^p dans $g(x)$, ie $\det(E_1, \dots, E_p, E_{p+1}, -C_{p+2}, \dots, -C_n)$ (toujours par hypothèse de récurrence).

— Par récurrence, P_p est vraie pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.

En appliquant le résultat précédent aux colonnes de A, on trouve que χ_A est polynomiale de degré au plus n et le coefficient de x^n est $\det(E_1, \dots, E_n) = 1$. ∎

II.2.2 Exemple

Calculer sous forme factorisée le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $x \in \mathbb{K}$, $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ x-1 & x & -1 \\ x-1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$.

On a sommé toutes les colonnes dans C_1.

Ainsi $\chi_A(x) = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)^2$.

II.2.3 Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le coefficient constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient de X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$. Ainsi

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

Preuve.
On a en effet $\chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ qui est bien le coefficient constant.

Pour la trace, voir la fin du chapitre. ∎

II.2.4 Exemple
Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

II.2.5 Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Posons $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Soit également $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors $\lambda I_n - A = \lambda P^{-1}P - P^{-1}BP = P^{-1}(\lambda I_n - A)P$. Ainsi $\lambda I_n - A$ et $\lambda I_n - B$ sont semblables et ont donc le même déterminant, ie $\chi_A = \chi_B$

II.2.6 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension n. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme associé à l'application $x \mapsto \det(xf - Id_E)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E alors $\chi_f = \chi_A$.

II.2.7 Exemple
On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P + P' \end{cases}$. Calculer χ_f. On trouve immédiatement $(X-1)^4$.

II.3 Lien avec les valeurs propres

II.3.1 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

1. λ est une valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_f.
2. λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_A.

Preuve.
Les deux énoncés sont équivalents. Prouvons le premier.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(f) &\iff \exists x \in E \backslash \{0\}\ f(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \in E \backslash \{0\}\ x \in \ker(\lambda Id_E - f) \\ &\iff \lambda Id_E - f \notin GL(E) \\ &\iff \det(\lambda Id_E - f) = 0 \end{aligned}$$ ∎

II.3.2 Cas des matrices triangulaires ou diagonales

Rappelons qu'un déterminant triangulaire se calcul par produit des éléments diagonaux.

On en déduit que pour une matrice triangulaire (et donc pour une diagonale), les valeurs propres se lisent sur la diagonale.

II.3.3 Déterminer les éléments propres

On procède comme suit :

1. Calculer le polynôme caractéristique
2. Trouver les racines dudit polynôme
3. Calculer les espaces propres qui correspondent.

II.3.4 Exemple
Trouver les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On a $\chi_A = X^2 - 2X + 2$ donc les valeurs propres de A sont $1 \pm i$.

— Calcul de E_{i+i}. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. $X \in E_{1+i}$ ssi $AX = (1+i)X$ ssi $\begin{cases} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{cases}$ ssi $-ix - y = 0$ (on remarque que la deuxième ligne est forcément proportionnelle à la première car $1 + i$ est valeur propre donc $E_{1+i} \neq \{0\}$. Ici le facteur est i). Ainsi $E_{1+i} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

— Calcul de E_{1-i}. On trouve $E_{1-i} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

II.3.5 Théorème (Rappel : d'Alembert-Gauss)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

— Si P est non constant, alors P possède un moins une racine dans $\mathbb{C}$.

— Si P est non nul, il possède exactement autant de racine dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité) que son degré. On dit que P est **scindé**.

Preuve.
Admis, comme en sup. ∎

II.3.6 Proposition (Déterminant triangulaire par bloc)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, C sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Preuve.
Notons $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ (ie notons p la taille de A).

— Si $p = 1$, alors le résultat est simplement l'application du développement par rapport à la première colonne.

— Supposons le théorème vrai pour les matrices A de taille $p \geqslant 1$. Montrons le pour A de taille $p+1$

1. Si la première colonne de A est nulle alors $\det(A) = \det(M) = 0$ et la formule est vérifiée.
2. Si $a_{1,1} \neq 0$ alors on élimine tous les termes de la première colonne de A par opérations élémentaires sans changer ni la valeur de $\det(A)$ ni celle de $\det(M)$. Notons $A' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ la matrice obtenue après opérations puis en retirant les premières lignes et colonnes de A. On a alors $\det(A) = a_{1,1}\det(A')$ et $\det(M) = a_{1,1}\begin{vmatrix} A' & ? \\ 0 & C \end{vmatrix} = a_{1,1}\det(A')\det(C) = \det(A)\det(C)$. par hypothèse de récurrence.
3. Si $a_{1,1} = 0$, on échange deux lignes dans M (et dans A) pour placer un coefficient non nul en position $1,1$. Ceci oppose à la fois $\det(A)$ et $\det(M)$. On est maintenant revenu au cas précédent, sauf que l'on calcule $-\det(M) = (-\det(A))\det(C)$.

— Par récurrence, le théorème est vrai pour toute taille de la matrice A. ∎

II.3.7 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. Notons $\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ comme racine de χ_f (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre λ).

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant \mu(\lambda)$$

Preuve.

— λ est une valeur propre de f donc $E_\lambda \neq \{0_E\}$ de donc $1 \leqslant \dim(E_\lambda)$.

— Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_λ. On complète cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $0, B, C$ sont des matrices. Ainsi, pour $x \in \mathbb{K}$, $\chi_f(x) = \begin{vmatrix} (x-\lambda)I_p & -B \\ 0 & xI_{n-p} - C \end{vmatrix} = \det((x-\lambda)I_p)\det(xI_{n-p} - C) = (x-\lambda)^p\chi_C(x)$.
Ainsi λ est racine de multiplicité au moins p de χ_f. ∎

II.3.8 Exemple
Reprendre II.2.2 et calculer les espaces propres. On trouve $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

II.3.9 Exemple
Trouver un exemple où $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda) > 1$. Prendre une matrice diagonale, ou une projection.

III Diagonalisation

Rappel : E est toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

III.1 Diagonalisabilité

III.1.1 Définition

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable ssi son application linéaire canoniquement associée est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.

III.1.2 Exemple
Les projecteurs et symétries.

III.1.3 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de f associées aux vecteurs propres de $\mathcal{B}$.

III.1.4 Influence de $\mathbb{K}$

Comme on l'a vu en pratique, il peut être insuffisant de chercher à diagonaliser un $\mathbb{R}$-endomorphisme sur $\mathbb{R}$. On peut parfois considérer E comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (polynôme, matrices, colonnes) si cela est autorisé par l'énoncé.

III.1.5 Exemple

1. La matrice de II.2.2 n'est pas diagonalisable. En effet les seuls vecteurs propres de A sont dans E_1 ou E_{-1}. Si on prend 3 vecteurs propres, au moins deux appartiennent à l'une des deux droites E_1 ou E_{-1} donc la famille est liée.
2. La matrice de II.3.4 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Si $e_1 \in E_{1-i}$ et $e_2 \in E_{1+i}$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(e_1, e_2)$ alors $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$.
   Remarquez qu'on a $A = PDP^{-1}$.

III.1.6 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$.

Preuve.
On sait déjà qu'une somme d'espace propres est directe et donc a priori $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \subset E$.

— Supposons $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$. Alors la concaténation de bases des E_λ est une base de E qui est composée de vecteurs propres (des vecteurs NON NULS des E_λ car ils se trouvent dans des familles libres).

— Réciproquement, supposons f diagonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale. Elle est composée de vecteurs propres par définition des vecteurs propres (encore une fois, des vecteurs d'une famille libre sont forcément non nuls). Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $e_i \in \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$ (il est dans l'un des espaces de la somme). $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$ contient donc une base de E donc $E \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$ ce qui prouve l'égalité de ces ensembles. ■

III.1.7 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(f)$ on a $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$ (la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f).

Preuve.

— Supposons f diagonalisable. Alors $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$, ainsi $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) = \dim(E)$.
Or on a également $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \in Sp(f)} \mu(\lambda) \leqslant n$ (un polynôme de degré n ne peut pas avoir plus de n racines dans $\mathbb{K}$).
Ainsi χ_f est scindé. De plus, $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \underbrace{(\mu(\lambda) - \dim(E_\lambda))}_{\geqslant 0} = 0$ et donc tous les nombres de cette somme sont nuls.

— Réciproquement, supposons χ_f scindé et E_λ de dimension maximale pour tout $\lambda \in Sp(f)$.
Alors $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \subset E$ et $\dim \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in Sp(\mathbb{K})} \dim(E_\lambda) = n$ ce qui prouve l'égalité de ces deux espaces vectoriels et donc la diagonalisabilité de f d'après le théorème III.1.6 ■

III.1.8 Remarque

On a prouvé au passage que f est diagonalisable ssi la somme des dimensions des espaces propres vaut n.

III.1.9 Exemple

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

2. Montrer que $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ -2x-y \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

III.1.10 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. SI χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples ALORS f est diagonalisable.

III.1.11 Remarque

Cette condition n'est absolument pas nécessaire : prendre une projection sur un plan de $\mathbb{R}^3$.

III.1.12 Traduction sur les matrices

Elle est immédiate. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. A est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ composée de vecteurs propres de A. Si on note P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ alors $P^{-1}AP$ est diagonale.
2. A est diagonalisable ssi $\bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda = \mathbb{K}^n$.
3. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(A)$ $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$.
4. SI χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples ALORS A est diagonalisable.

III.2 Applications

III.2.1 Calcul de puissances

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Si x est un vecteur propre de f associée au scalaire λ alors $f(x) = \lambda x$ et $\forall k \in \mathbb{N} f^k(x) = \lambda^k x$.
2. Si A est diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$ $A = PD^kP^{-1}$.

III.2.2 Matrices particulières

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'ordre $p > 0$. Soit λ une valeur propre complexe de N et $X \in E_\lambda(N)$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$, $N^kX = \lambda^k X$ en particulier pour $k = p$, $0 = \lambda^p X$ donc $\lambda^p = 0$ et finalement $\lambda = 0$.

   La seuls valeur propre possible de N est 0 et donc N ne peut pas être diagonalisable (Sinon $N = P \times 0 \times P^{-1} = 0$).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre λ et diagonalisable. Alors pour une certaine matrice P, $A = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda I_n$.

III.2.3 Une suite d'ordre 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix} X_n$

Par une récurrence immédiate, $X_n = A^n X_0$. Calculons A^n en la diagonalisant si possible. On a $\chi_A(X) = X^3 - 4X^2 + X + 6 = (X+1)(X-2)(X-3)$. Ainsi A est diagonalisable et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale associée via la matrice de passage P.

On a alors $X_n = PD^nP^{-1}X_0$. Les coefficients de $PD^nP^{-1}X_0$ sont des combinaisons linéaires de $(-1)^n, 2^n$ et 3^n. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n + \gamma 3^n$ avec $\alpha, \beta\gamma \in \mathbb{R}$ à déterminer.

III.2.4 Théorème
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $p \geqslant 1$. On suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+p} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$.

1. Le polynôme $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$ est appelé polynôme caractéristique de (u_n).
2. Si P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \dots \alpha_p$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k^n$$

.

Preuve.
Reprenons la trame de l'exemple précédent.

La matrice est maintenant $A(a_0, \dots, a_{p-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ a_0 & & \dots & & a_{p-1} \end{pmatrix}$ Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & x & -1 \\ -a_0 & & \dots & & x - a_{p-1} \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \\ -a_1 & \dots & & x - a_{p-1} \end{vmatrix} + (-1)^{p+1}(-a_0) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix} \\
&= x \det(xI_{p-1} - A(a_1, \dots, a_{p-1})) - a_0
\end{aligned}$$

On peut donc procéder par récurrence, si $\det(xI_{p-1} - A(a_1, \dots, a_{p-1})) = x^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1}x^k$ (remarquer le changement d'indice pour a, le premier des coefficients dans la matrice est a_1) alors

$$\chi_A(x) = x \left(x^{p-1} - \sum_{k=0}^{p-2} a_{k+1}x^k \right) - a_0 = x^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$$

en changeant d'indice et en incorporant a_0 à la somme.

Si χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable et on peut conclure comme dans l'exemple précédent. ■

III.2.5 Exemple
Dans le cas général, montrer que les espaces propres de $A(a_0, \dots, a_{p-1})$ sont des droites et donc que $A(a_0, \dots, a_{p-1})$ est diagonalisable ssi χ est scindé à racines simples.

IV Trigonalisation

IV.1 Théorie

IV.1.1 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure (on dit que f est trigonalisable).

La diagonale est constituée de toutes les racines de χ_f, avec multiplicité (une racine de multiplicité r apparaît r fois sur cette diagonale).

Preuve.
Admis ! ■

IV.1.2 Corollaire
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ ie il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que PAP^{-1} est triangulaire supérieure.

Preuve.
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé ! ■

IV.1.3 Exemple
On reprend la matrice du II.2.2. A n'est pas diagonalisable car $\dim(E_1) = 1 < 2 = \mu(1)$.

On note $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $Au = -u$ et $AV = v$.

Trouver w tel que $Aw = w + v$. Le système à résoudre est

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 1 = z - 2 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

On prend $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est bien triangulaire.

IV.2 Conséquences pratiques

IV.2.1 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines (complexes) de χ_f non nécessairement distinctes.

1. $\operatorname{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$
2. $\det(f) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.

IV.2.2 Remarque

On retrouve le fait que f est bijective (ou A est inversible) ssi 0 n'est pas valeur propre de f.

IV.3 Deviner la dernière valeur propre

Remarquons que 1 est valeur propre au moins double de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Comme $\operatorname{tr}(A) = 6$, la dernière valeur propre complexe λ vérifie $1 + 1 + \lambda = 6$ et donc $\lambda = -4$. On a calculé la trace d'une matrice triangulaire semblable à A.

Index