

Table des matières

- I Probabilités** 1
- I.1 Les définitions 1
- I.2 Calculs de probabilités 1
- II Variables aléatoires** 2
- II.1 Loi d'une variable 2
- II.2 Moments 3
- II.3 Lois usuelles 3

I Probabilités

I.1 Les définitions

Définition 1

On appelle univers l'ensemble des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire. Dans ce cours, on ne considère que des univers finis. On le note souvent Ω .

Un événement est une partie (un sous ensemble) de Ω , qui représente un ensemble d'issues "favorables".

Un événement élémentaire est un événement à un seul élément (un singleton).

Définition 2

Soient A, B deux événements de l'univers Ω .

1. L'événement A et B est $A \cap B$.
2. L'événement A ou B est $A \cup B$.
3. On dit que A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3

Soit Ω un univers. On dit que A_1, \dots, A_n est un système complet d'événements ssi $\bigcup_i A_i = \Omega$ et cette réunion est disjointe ie les A_i sont disjoints 2 à 2

Définition 4

Soit Ω un univers. On appelle probabilité sur Ω une fonction \mathbb{P} définie sur les événements $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie pour tout $A, B \subset \Omega$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

et en plus $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Le couple (Ω, \mathbb{P}) est appelé espace probabilisé. On se place maintenant dans le cadre d'un tel espace et on conserve ces notations.

Définition 5

1. Soient A, B deux événements. On dit qu'ils sont équiprobables ssi $\mathbb{P}(A) = \text{Prob}(B)$.
2. La probabilité \mathbb{P} est dite uniforme si tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Définition 6

Soit B un événement dans Ω tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ (ie $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Pour tout événement A on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ et on la note $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$

Définition 7

Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition 8

Soient A_1, \dots, A_n des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

I.2 Calculs de probabilités

Proposition 1

On suppose que \mathbb{P} est la probabilité uniforme. Soit A un événement.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Premier outil : le dénombrement !

Proposition 2

Soient A, B deux événements.

1. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Pour le calcul des probabilités d'intersections d'événements, on dispose de plusieurs outils :

Théorème 1 (Formule des probabilités composées)

On considère A_1, \dots, A_n des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ (ie on a pris $n \geq 2$).

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Bien noter le cas le plus simple (dans le cas où la formule a du sens) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

On en déduit :

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités toutes non nulle. Soit B un événement. Alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

En particulier, si $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$.

Théorème 3 (Formule de Bayes)

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
2. Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités toutes non nulle.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

On utilise très souvent la deuxième forme, c'est à dire que l'on calcule $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales.

Le dernier outil, encore plus simple pour les intersections : les événements indépendants.

II Variables aléatoires

II.1 Loi d'une variable

Définition 9

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction $X : \Omega \rightarrow E$ où E est un ensemble.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle. En pratique, il faut **TOUJOURS** commencer par rappeler/trouver E et surtout $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

II.1.1 Probabilité de valeurs

On note $\mathbb{P}(X \in A)$ la probabilité de l'événement $(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$. Si A est le singleton $\{x\}$, on note plutôt $\mathbb{P}(X = x)$.

Si de plus X est à valeurs réelle, on peut considérer $A = E \cap]-\infty, x]$ l'ensemble des éléments de E qui sont $\leq x$. On note $(X \leq x)$ cet événement. Evidemment, cette définition peut s'étendre aux autres symboles de comparaison.

L'application $\begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$ est appelée loi de la variable X .

Proposition 3

Soit X une variable aléatoire. Les événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'événements de Ω .

Définition 10

On considère deux variables aléatoires X, Y définies sur un même univers fini Ω . La variable aléatoire $\begin{cases} \Omega & \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$ est notée (X, Y) et sa loi est appelée loi conjointe de X et Y .

Pour $x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X = x) \text{ et } (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

La loi de X est alors appelée première loi marginale et la loi de Y deuxième loi marginale.

En pratique, on peut présenter la loi conjointe dans un tableau à double entrées.

Définition 11

Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω . On dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y .

Proposition 4

Soient X, Y deux variables indépendantes et $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

Définition 12

Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires sur Ω . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$.

Proposition 5

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

II.2 Moments

Définition 13

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre $\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$. Elle ne dépend que de la loi de X .

On dit que X est **centrée** ssi $E(X) = 0$.

Proposition 6

Si on connaît tous les événements élémentaires de l'univers et les valeurs de X qui correspondent, on peut utiliser le résultat suivant :

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Alors $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Proposition 7 (Propriétés de l'espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω .

1. Linéarité. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
2. Positivité : si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
3. Croissance. Si $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \leq Y(\omega)$ (que l'on note $X \leq Y$) alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème 4 (Théorème de transfert)

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par

la loi de X .

Proposition 8

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω . SI elles sont indépendantes, ALORS $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Définition 14

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \in \mathbb{R}^+.$$

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On dit que X est réduite ssi $V(X) = \sigma(X) = 1$

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire réelle.

Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (on en déduit d'ailleurs que $E(X^2) \geq E(X)^2$)

Proposition 10

Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Proposition 11

Si X et Y sont des variables réelles indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

II.3 Lois usuelles

Définition 15

Soit E un ensemble fini et $X : \Omega \rightarrow E$ une VA. On dit que X suit la loi uniforme sur E (on note $\mathcal{U}(E)$ cette loi) ssi $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$.

Interprétation : modélise un choix "au hasard" dans un ensemble à n éléments.

Définition 16

Soit $p \in [0, 1]$ un nombre fixé. Soit $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) ssi $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Interprétation : modélise le succès (de probabilité p) ou l'échec d'une expérience.

Définition 17

Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p (noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$) ssi

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Interprétation : modélise le **nombre de succès** dans la répétition de n expériences indépendantes, chacune ayant une probabilité p de réussite. X est donc la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

Nom	Notation	Valeurs	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$