

# Table des matières

**I Probabilités**

I.1 Les définitions . . . . . 1

I.2 Calculs de probabilités . . . . . 1

**II Variables aléatoires**

II.1 Loi d'une variable . . . . . 2

II.2 Moments . . . . . 3

II.3 Lois usuelles . . . . . 3

## I Probabilités

### I.1 Les définitions

**Définition 1**

On appelle univers l'ensemble des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire. Dans ce cours, on ne considère que des univers finis. On le note souvent  $\Omega$ .

Un événement est une partie (un sous ensemble) de  $\Omega$ , qui représente un ensemble d'issues "favorables".

Un événement élémentaire est un événement à un seul élément (un singleton).

**Définition 2**

Soient  $A, B$  deux événements de l'univers  $\Omega$ .

1. L'événement  $A$  et  $B$  est  $A \cap B$ .
2. L'événement  $A$  ou  $B$  est  $A \cup B$ .
3. On dit que  $A$  et  $B$  sont incompatibles ssi  $A \cap B = \emptyset$ .

**Définition 3**

Soit  $\Omega$  un univers. On dit que  $A_1, \dots, A_n$  est un système complet d'événements ssi  $\bigcup_i A_i = \Omega$  et cette réunion est disjointe ie les  $A_i$  sont disjoints 2 à 2

**Définition 4**

Soit  $\Omega$  un univers. On appelle probabilité sur  $\Omega$  une fonction  $\mathbb{P}$  définie sur les événements  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie pour tout  $A, B \subset \Omega$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

et en plus  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

Le couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  est appelé espace probabilisé. On se place maintenant dans le cadre d'un tel espace et on conserve ces notations.

**Définition 5**

1. Soient  $A, B$  deux événements. On dit qu'ils sont équiprobables ssi  $\mathbb{P}(A) = \text{Prob}(B)$ .
2. La probabilité  $\mathbb{P}$  est dite uniforme si tous les événements élémentaires sont équiprobables.

**Définition 6**

Soit  $B$  un événement dans  $\Omega$  tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$  (ie  $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ).

Pour tout événement  $A$  on appelle probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  le nombre  $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$  et on la note  $\mathbb{P}(A|B)$  ou  $\mathbb{P}_B(A)$

**Définition 7**

Soient  $A, B$  deux événements. On dit que  $A$  et  $B$  sont indépendants ssi  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

**Définition 8**

Soient  $A_1, \dots, A_n$  des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

### I.2 Calculs de probabilités

**Proposition 1**

On suppose que  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme. Soit  $A$  un événement.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Premier outil : le dénombrement !

**Proposition 2**

Soient  $A, B$  deux événements.

1.  $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
2.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3.  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Pour le calcul des probabilités d'intersections d'événements, on dispose de plusieurs outils :

**Théorème 1 (Formule des probabilités composées)**

On considère  $A_1, \dots, A_n$  des événements tels que  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$  (ie on a pris  $n \geq 2$ ).

Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Bien noter le cas le plus simple (dans le cas où la formule a du sens) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

On en déduit :

### Théorème 2 (Formule des probabilités totales)

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulle. Soit  $B$  un événement. Alors  $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$ .

En particulier, si  $\mathbb{P}(A) \in ]0, 1[$ , alors  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A})$ .

### Théorème 3 (Formule de Bayes)

Soit  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

1. Soit  $A$  un événement tel que  $\mathbb{P}(A) > 0$ .  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ .
2. Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements de probabilités toutes non nulle.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}$$

On utilise très souvent la deuxième forme, c'est à dire que l'on calcule  $\mathbb{P}(B)$  par la formule des probabilités totales.

Le dernier outil, encore plus simple pour les intersections : les événements indépendants.

## II Variables aléatoires

### II.1 Loi d'une variable

#### Définition 9

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur  $\Omega$  est une fonction  $X : \Omega \rightarrow E$  où  $E$  est un ensemble.

Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , on dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle. En pratique, il faut **TOUJOURS** commencer par rappeler/trouver  $E$  et surtout  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire.

#### II.1.1 Probabilité de valeurs

On note  $\mathbb{P}(X \in A)$  la probabilité de l'événement  $(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ . Si  $A$  est le singleton  $\{x\}$ , on note plutôt  $\mathbb{P}(X = x)$ .

Si de plus  $X$  est à valeurs réelle, on peut considérer  $A = E \cap ]-\infty, x]$  l'ensemble des éléments de  $E$  qui sont  $\leq x$ . On note  $(X \leq x)$  cet événement. Evidemment, cette définition peut s'étendre aux autres symboles de comparaison.

L'application  $\begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$  est appelée loi de la variable  $X$ .

#### Proposition 3

Soit  $X$  une variable aléatoire. Les événements  $(X = x)$  pour  $x \in X(\Omega)$  forment un système complet d'événements de  $\Omega$ .

#### Définition 10

On considère deux variables aléatoires  $X, Y$  définies sur un même univers fini  $\Omega$ . La variable aléatoire  $\begin{cases} \Omega & \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$  est notée  $(X, Y)$  et sa loi est appelée loi conjointe de  $X$  et  $Y$ .

Pour  $x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  on a  $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X = x) \text{ et } (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

La loi de  $X$  est alors appelée première loi marginale et la loi de  $Y$  deuxième loi marginale.

En pratique, on peut présenter la loi conjointe dans un tableau à double entrées.

#### Définition 11

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires sur  $\Omega$ . On dit qu'elles sont indépendantes ssi  $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$  ie ssi les événements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de  $x$  et  $y$ .

#### Proposition 4

Soient  $X, Y$  deux variables indépendantes et  $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$ . Alors  $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$ .

#### Définition 12

Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires sur  $\Omega$ . On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi  $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$ .

#### Proposition 5

Si  $X, Y$  sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer  $f(X)$  et  $g(Y)$  pour des fonctions  $f$  et  $g$  alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

## II.2 Moments

### Définition 13

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de  $X$  et on note  $E(X)$  le nombre  $\sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$ . Elle ne dépend que de la loi de  $X$ .

On dit que  $X$  est **centrée** ssi  $E(X) = 0$ .

### Proposition 6

Si on connaît tous les événements élémentaires de l'univers et les valeurs de  $X$  qui correspondent, on peut utiliser le résultat suivant :

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire. Alors  $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ .

### Proposition 7 (Propriétés de l'espérance)

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ .

1. Linéarité. Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ .
2. Positivité : si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$ .
3. Croissance. Si  $\forall \omega \in \Omega X(\omega) \leq Y(\omega)$  (que l'on note  $X \leq Y$ ) alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

### Théorème 4 (Théorème de transfert)

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire et  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ .

Alors  $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$ . Ainsi l'espérance de  $f(X)$  est déterminée par

la loi de  $X$ .

### Proposition 8

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles sur  $\Omega$ . SI elles sont indépendantes, ALORS  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

### Définition 14

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On appelle variance de  $X$  la quantité

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \in \mathbb{R}^+.$$

L'écart type de  $X$  est  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

On dit que  $X$  est réduite ssi  $V(X) = \sigma(X) = 1$

### Proposition 9

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.

Alors  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$  (on en déduit d'ailleurs que  $E(X^2) \geq E(X)^2$ )

### Proposition 10

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

### Proposition 11

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables réelles indépendantes,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

## II.3 Lois usuelles

### Définition 15

Soit  $E$  un ensemble fini et  $X : \Omega \rightarrow E$  une VA. On dit que  $X$  suit la loi uniforme sur  $E$  (on note  $\mathcal{U}(E)$  cette loi) ssi  $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$  pour tout  $x \in E$ .

**Interprétation :** modélise un choix "au hasard" dans un ensemble à  $n$  éléments.

### Définition 16

Soit  $p \in [0, 1]$  un nombre fixé. Soit  $X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (notée  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ) ssi  $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ .

**Interprétation :** modélise le succès (de probabilité  $p$ ) ou l'échec d'une expérience.

### Définition 17

Soit  $p \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$  non nul. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . On dit que  $X$  suit la loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$  (noté  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ) ssi

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Interprétation :** modélise le **nombre de succès** dans la répétition de  $n$  expériences indépendantes, chacune ayant une probabilité  $p$  de réussite.  $X$  est donc la somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$ .

Nom	Notation	Valeurs	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	$p$	$p(1 - p)$
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$np$	$np(1 - p)$