Devoir maison n°10

A rendre le 11/01/2022.

Définition préliminaire

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.

On dit qu'une suite de matrice $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tous indices i, j, la suite complexe $(a_{i,j}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij} (qui est donc une limite finie).

Par exemple la suite des matrices $A_p = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{2^p} & 1 \end{pmatrix}$ converge vers la matrice I_2.

On admet une propriété faciles à prouver (un bon exercice est de le faire) :

Si deux suites (A_p) et (B_p) de matrices de $M_n(\mathbb{C})$ convergent vers A et B respectivement alors la suite $(A_p \times B_p)$ converge vers AB.

Partie I

On considère la matrice carré A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?
3. On note
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$
   Calculer D^n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On demande ici une expression explicite de la limite.
5. Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que
   — $a > 0, b > 0, c > 0$,
   — $a + b + c = 1$,
   — $\pi A = \pi$.

Partie II, facultative

Soit $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

On dit que la matrice M est **stochastique** si

— pour tout couple d'entier naturels (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$m_{ij} \geqslant 0$$

— la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est à dire, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

1. Soit $M = M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice stochastique.
   Montrer que, pour tout couple d'entier naturels (i, j) tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$:
$$m_{ij} \leqslant 1$$
2. Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que si M est stochastique, alors X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
   (b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si X_1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors M est stochastique.
   (c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.
3. Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$.
   (a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
   Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$:
$$|y_i| \leqslant 1$$
   (b) En déduire que si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors :
$$|\lambda| \leqslant 1$$
   (c) Montrer que toutes les valeurs propres de M sont de module inférieur à 1.

Le sujet se terminait ici. On pourrait ajouter tout de même : dans le cas où M est diagonalisable, que dire de la convergence de $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$?