

Lois usuelles

Exercice 1

Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre huit.

- Déterminer la probabilité des événements :
 - Huit voitures ont été vendues en une semaine.
 - Au moins deux voitures ont été vendues en une semaine.
- Plus de huit voitures ont été vendues en une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait eu douze ventes ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait eu au moins six et au plus dix voitures vendues en une semaine ?
- Quelle est la probabilité qu'on vende moins de seize voitures en une semaine, sachant qu'on en vendra plus de huit ?

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre λ et μ . Calculer la loi de X sachant $X + Y = n$ (n fixé).

Exercice 3

On lance une pile non symétrique, qui a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur pile. Dans un premier temps on lance la pièce jusqu'à obtenir pile et on note N le nombre de lancers nécessaires.

Dans un second temps, on lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette série de lancers

- Préciser la loi de N .
- Préciser la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
- Donner la loi de X .

Applications directes

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$; soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , telles que

$$\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{k+1}j!}.$$

- Déterminer a .
- X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 6

On lance deux dés à 6 faces simultanément.

Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le minimum des deux chiffres obtenus. On pourra calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Exercice 7

Une personne, appelée X , après avoir lu une série de statistiques effrayantes sur la consommation de chocolat, décide d'arrêter. Les probabilités suivantes sont estimées :

- Si X a consommé du chocolat un jour J_n , alors la probabilité qu'elle n'en consomme pas le jour suivant J_{n+1} , est 0,9.
- Si X n'a pas consommé de chocolat un jour J_n , alors la probabilité qu'elle n'en consomme pas le jour suivant J_{n+1} , est 0,3.

- Pour n entier strictement positif, on note P_n la probabilité que X consomme du chocolat le jour J_n .

Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .

- Quelle est la limite de P_n ? X va-t-elle réussir à s'arrêter ?

Exercice 8

On effectue des tirages dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire :

- si on tire une boule noire, on arrête ;
- si on tire une boule blanche, on la remet et on ajoute une autre boule blanche.

Soit X le rang d'obtention de la boule noire.

Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$.

Exercice 9

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n ; la boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule de cette boîte. Soient X le numéro de la boîte, et Y celui de la boule.

- Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- Déterminer la loi de Y .

Exercice 10

Dans la forêt de Palombie, le Marsupilami a le choix entre trois zones de pêche, notées A , B et C , pour trouver des piranhas.

A l'instant 0, il se trouve en A . Quand il a trouvé un poisson dans une zone, il peut y rester avec une probabilité $\frac{1}{2}$, ou la quitter pour une des deux autres zones, de façon équiprobable.

Quand $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le Marsupilami est en A après son $n^{\text{ème}}$ poisson » ;
- B_n l'événement « le Marsupilami est en B après son $n^{\text{ème}}$ poisson » ;
- C_n l'événement « le Marsupilami est en C après son $n^{\text{ème}}$ poisson ».

Enfin, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
 (b) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier (sans calculs) que la matrice A est diagonalisable.
 - (b) Prouver que $\frac{1}{4}$ est valeur propre de A , et déterminer le sous-espace propre associé.
 - (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .
4. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n, b_n, c_n)$.

Plus délicat

Exercice 11

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 2$). On tire simultanément 2 boules, et on note X la variable aléatoire représentant le plus petit des deux nombres obtenus. Déterminer la fonction de répartition F de X , puis la loi de X .

Reprendre l'exercice dans le cas où on tire 3 boules.

Exercice 12

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_N définies sur un même espace probabilisé (Ω, τ, P) , mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$, puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$

c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega)).$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$.
 En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
- (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 13 (Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N})

Soit $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire.

Montrer que N est d'espérance finie \Leftrightarrow la série $\sum_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$ converge,

et que, dans ce cas, $E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N \geq n)$.