Devoir maison n°11

A rendre le 18/01

Exercice 1
Soit X et Y deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant

$$\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\begin{cases}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0\leqslant j\leqslant i\\ 0 & \text{si } 0\leqslant i<j\end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0<\alpha<1$ et $\lambda>0$.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z=X-Y$. Déterminer la loi de Z.
5. Soient j et n deux entiers naturels. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y=j|Z=n)$.
6. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?
7. On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $2,2$. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $1/2$ et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

1. Nous connaissons la loi conjointe, on cherche une loi marginale. Voir le cours, nous avons parlé de tableaux à ce moment là
2. Idem
3. Est-ce que la définition s'applique ?
4. Comme dans le cours, il s'agit de faire une disjonction de cas suivant les valeurs de X (par exemple). Penser à citer les théorèmes.
5. Définition
6. On pourra noter (comprendre pourquoi en relisant attentivement l'énoncé) X le nombre d'enfants et Y le nombre de garçons. On cherche alors $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$.