Exercice 1
Soient $(a_n)_n$ *une suite de nombres réels. On sait que* $\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. *Calculer* a_0, a_1.
2. *Calculer les sommes :*

$$S_1 = \sum_{k=0}^{6} a_k, S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} a_k, S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k, S_4 = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}, S_5 = \sum_{k=1}^{n} 2a_k, S_6 = \sum_{k=0}^{n} (a_k - 1), S_7 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

3. *Déterminer* a_n *en fonction de* n.

Exercice 2
Calculer (n *est un entier naturel non nul) :*

1. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$
2. $\sum_{k=1}^{n} (k+2^k)$
3. $\sum_{j=0}^{n} e^{\frac{j}{n+1}}$
4. $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$
5. $\ln(\frac{1}{2}) + \ln(\frac{2}{3}) + \cdots + \ln(\frac{n-1}{n})$.
6. $\prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}$
7. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$ *avec* n *pair puis impair*
8. $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$
9. $\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$
10. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ *après décomposition en somme du terme général*
11. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$ *en triant les termes.*

Exercice 3
Montrer que $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$ *de deux manières.*

Exercice 4
Calculer les sommes doubles

1. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$
2. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$
3. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
4. $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^j$

Exercice 5
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^n \end{array} \right.$ *pour un* $n > 0$ *entier naturel fixé.*

1. *Développer l'expression de* f *(sous 2 formes semblables).*
2. *En déduire la valeur de* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k, \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j$.
3. *Après dérivation, calculer* $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ *et* $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.
4. *En déduire* $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 6

1. *Soient* $n, k \in \mathbb{N}$ *avec* $k \geqslant 1$ *et* $n > k$. *Donner un lien entre* $\binom{n}{k}$ *et* $\binom{n-1}{k-1}$ *sous forme de produit.*
2. *Calculer* $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Calculer* $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Exercice 7
Soit $n > 0$ *un entier. On pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. *Montrer que* $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$. *Qu'en déduire pour la suite* $(S_n)_{n>0}$ *?*
2. *Pour* $k \in [\![1, n]\!]$, *majorer* $\frac{1}{n+k}$ *par un nmbre indépendant de* k. *Montrer que* (S_n) *est majorée. Que peut-on alors dire ?*

Exercice 8
Résoudre ($x \in \mathbb{R}$ *est l'inconnue)*

1. $|x+3| < 2$
2. $|x+1| > 4$
3. $2|x-1| = |x+3| - 1$.
4. $|x+1| \leqslant |2x-1| + 1$

Exercice 9

1. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}^+$. *Montrer que* $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. (a) *Montrer que pour tous réels* x, y *on a* $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.
   (b) *Montrer que pour* $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$.
   (c) *En reprennant* $a, b, c > 0$, *montrer que* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$. *On pourra noter* $S = a+b+c$.

Exercice 10

1. *Montrer que pour* $x \geqslant 0$ *on a* $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
2. *En déduire un encadrement de* $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$ *puis un encadrement de* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
3. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.