Table des matières

I Intégrales convergentes

I.1 Intégrales impropres

Définition 1
Soient $a < \boxed{b \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

Définition 2
Soient $\boxed{-\infty \leqslant a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a,b],\mathbb{R})$. La borne ouverte est a.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

Définition-Proposition 1
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a,b[\ \int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ et on note cette valeur $\int_a^b f$.

Définition 3 (Notation)
Soit I un intervalle dont les bornes sont $a < b$. Ces bornes peuvent être ouvertes ou fermées. On note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale (classique ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f$.

I.2 Prolongement par continuité

Proposition 1
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat s'applique encore lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux bornes sont ouvertes, si on peut prolonger à chaque borne.

I.3 Intégrales de référence

Proposition 2

$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.

Proposition 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$.

Dans le cas de convergence, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Théorème 1 (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ sont deux intégrales **divergentes**

I.4 Adaptation des outils

Théorème 2
Soient $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.

$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

Théorème 3
Soient $u, v : [a,b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int\limits_a^b u'v$ et $\int\limits_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int\limits_a^b u'v = [uv]_a^b - \int\limits_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Théorème 4
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et telle que $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.

II Preuves de convergence

II.1 Fonctions intégrables

Définition 4
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

Proposition 4 (Linéarité des intégrales convergentes)

Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ continues. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ converge également et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 5
Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

II.2 Comparaison

Théorème 6 (Comparaison)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{K})$ des fonctions continues.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
2. Si $f = O_b(g)$ et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
3. Si $f = o_b(g)$et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ ssi g est intégrable sur $[a,b[$.

Le résultat vaut encore pour des fonctions définies sur $]a,b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a.

Proposition 5
$L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est encore intégrable.

III Exemples importants

III.1 Application aux séries numériques

Théorème 7
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n\geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

III.2 Intégrales classiques