Table des matières

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Intégrales convergentes

Le cadre d'étude change : on considère toujours des fonctions continues, plus seulement sur des segments mais des intervalles quelconques.

I.1 Intégrales impropres

I.1.1 Définition

Soient $a < \boxed{b \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

I.1.2 Remarque

On ne se préoccupe pas de la valeur de a (la borne inférieure) du moment que l'intervalle de continuité est **fermé** en cette borne.

Par exemple pour f continue sur $\mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} f$ est convergente ssi $\int_4^{+\infty} f$ est convergente.

I.1.3 Exemple

Convergence + calcul de la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}t$.

I.1.4 Définition

Soient $\boxed{-\infty \leqslant a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a,b],\mathbb{R})$. La borne ouverte est a.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale (impropre) **convergente**.

I.1.5 Exemple (A savoir refaire)

Montrons que $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et donnons sa valeur.

— $\ln \in \mathcal{C}(]0,1],\mathbb{R})$ (ie. on fait une étude de convergence en 0).

— Soit $x > 0$. $\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1 - x\ln(x) + x \underset{x\to 0}{\to} -1$

— Conclusion : $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et sa valeur est -1.

I.1.6 Définition-Proposition

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int_a^b f$ converge.

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a,b[\int_a^{c'} f + \int_{c'}^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ et on note cette valeur $\int_a^b f$.

Preuve.
On a, par limite d'une somme (une intégrale convergente et une constante), $\int_a^c f = \int_a^{c'} f + \int_{c'}^c f$. De même $\int_c^b f = \int_c^{c'} f + \int_{c'}^b f$. Finalement, l'égalité demandée est vérifiée. ∎

I.1.7 Interprétation graphique

On peut continuer à voir une intégrale impropre comme une aire, mais cette fois comme l'aire limite d'un partie non nécessairement bornée.

I.1.8 Exemple

Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

I.1.9 Coin-culture

L'intégrale suivante est d'importance fondamentale en probabilité : $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

I.1.10 Définition (Notation)
Soit I un intervalle dont les bornes sont $a < b$. Ces bornes peuvent être ouvertes ou fermées. On note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale (classique ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f$.

Cette notation permet de ne pas préciser à priori la nature fermée ou ouverte des bornes.

I.2 Prolongement par continuité

I.2.1 Proposition
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int\limits_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat s'applique encore lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux bornes sont ouvertes, si on peut prolonger à chaque borne.

Preuve.
Soit $F_1 : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ la primitive de f sur $[a, b[$ qui s'annule en a et $F_2 : x \mapsto \int\limits_a^x \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ la primitive de $\tilde{f}$ sur $[a, b]$ qui s'annule en a, alors $\forall x \in [a, b[\ F_1(x) = F_2(x)$ et F_2 est continue sur $[a, b]$. F_2 est donc le prolongement par continuité de F_1 et on a bien $F_1(x) \underset{x\to b}{\to} F_2(b) = \int\limits_a^b \tilde{f}$. ■

I.2.2 Exemple
Montrer que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$ converge. Posons $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ qui est continue sur $]0, 1[$ (et donc on a deux études de convergence à faire.)

— Etude en 0. On a $t - 1 \underset{0}{\to} -1$ et $\ln(t) \underset{0}{\to} -\infty$ donc $f(t) \underset{0}{\to} 0$ et on peut prolonger f par continuité en 0.

— Etude en 1. On a $\ln(t) \underset{1}{\sim} t - 1$ car $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi $f(t) \underset{1}{\to} 1$ et on peut prolonger f par continuité en 1.

Finalement, $\int_0^1 f$ converge.

I.3 Intégrales de référence

Dans cette partie, nous allons lister des intégrales notoirement convergentes. Les résultat ainsi que les preuves sont à connaître.

I.3.1 Proposition

$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.

Preuve.
Voir plus haut ■

I.3.2 Proposition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 0$.

Dans le cas de convergence, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Preuve.
Le cas $\alpha = 0$ est trivial.

Dans le cas $\alpha \neq 0$, on a, pour $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}$$

Or $e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ lorsque $\alpha > 0$ et $e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ lorsque $\alpha < 0$.

On obtient bien une limite finie ssi $\alpha > 0$ (et on obtient $+\infty$ lorsque $\alpha \leqslant 0$) ■

I.3.3 Théorème (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ sont deux intégrales **divergentes**

Preuve.

1. Soit $x > 1$. $\int\limits_1^{x} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = [\frac{t^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)}]_1^x$ si $\alpha \neq 1$ et $[\ln(t)]_1^x$ si $\alpha = 1$.

   Dans le cas $\alpha = 1$ on a donc une intégrale divergente.

   Pour $\alpha \neq 1$, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{cases}$. On retrouve bien le résultat annoncé. Remarque : si $\alpha < 1$ alors $\frac{1}{t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^\alpha})$ et le théorème de comparaison nous assure de la divergence de l'intégrale de Riemann concernée.
2. Soit $x \in]0, 1[$. Le même calcul de primitive vaut encore. Comme $\ln(x) \underset{0}{\to} -\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge et le théorème de comparaison nous assure que $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge dès que $\alpha \geqslant 1$ (en 0, les comparaisons de puissances sont inverses de celles en $+\infty$).

   Cette fois, $x^{-\alpha+1} \underset{x\to 0}{\to} \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$ et on retrouve le résultat de convergence.
3. Conséquence directe des deux points précédents. ∎

I.4 Adaptation des outils

I.4.1 Théorème
Soient $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.

$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

Preuve.
Soient $c, d \in]\alpha, \beta[$. On a $\int\limits_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_c^d f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ avec $c \to \alpha \iff \varphi(c) \to a$.

Ainsi les intégrales convergent simultanément en a et α. ∎

I.4.2 Cas d'un changement décroissant

Si φ est supposée décroissante, on a alors $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$

I.4.3 Exemple
Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0, 1[$.

Par changement de variable bijectif $u = 1 - t$ ie $t = 1 - u$ on trouve une intégrale de Riemann divergente.

I.4.4 Exemple
Convergence et valeur de $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t$. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0, 1[$ par composition et inverse.

Posons $u = \sqrt{t}$ pour $t \in]0, 1[$ et donc on a $t = u^2$ et $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$. Alors $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = 2[\arcsin(u)]_0^1 = \pi$.

I.4.5 Théorème
Soient $u, v : [a, b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int\limits_a^b u'v$ et $\int\limits_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int\limits_a^b u'v = [uv]_a^b - \int\limits_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Preuve.
Immédiat d'après le cours de sup, en passant par des intégrales sur $[a,x]$. ∎

I.4.6 Remarque

On peut étendre ce théorème à $]a,b]$ et même à $]a,b[$ (dans ce cas le crochet est la différence de deux limites).

I.4.7 En pratique

On reviendra toujours à une intégrale sur un segment $[a,x]$ pour effectuer une intégration par parties puis on fait tendre x vers b. En effet, on ne connaît pas a priori la fonction u ni la limite de uv.

I.4.8 Exemple
Montrer la convergence et calculer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$. $t\mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Posons $A>0$. Alors $\displaystyle\int_0^A te^{-t}\mathrm{d}t=[-te^{-t}]_0^A+\int_0^A e^{-t} \underset{A\to+\infty}{\to} 1$ qui est une limite finie. Ainsi I converge et vaut 1.

> **I.4.9 Théorème**
> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
>
> Soit $f:I\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et telle que $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.
>
> Si $\int_I f=0$ alors $\forall x\in I\ f(x)=0$.

Preuve.
Remarquons que si $x\in I$ alors il existe un segment $[a,b]\subset I$ tel que $x\in[a,b]$.

De plus, comme f est positive, $0\leqslant \int\limits_{[a,b]} f\leqslant \int\limits_I f=0$

Or ce théorème est vrai quand I est un segment. Pour $x\in I$, il suffit d'appliquer le cours de 1ère année pour prouver que f est nulle sur un segment $[a,b]$ qui contient x et donc $f(x)=0$. ∎

II Preuves de convergence

II.1 Fonctions intégrables

II.1.1 Définition
Soit I un intervalle et $f:I\to\mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

II.1.2 Exemple
Etudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de $t\mapsto \ln(t)e^{-t}$.

II.1.3 Remarque

Pour les fonction positives ou négatives, l'intégrabilité et le fait que l'intégrale converge est équivalent.

> **II.1.4 Proposition (Linéarité des intégrales convergentes)**
>
> Soient $f,g:[a,b[\to\mathbb{K}$ continues. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux alors pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\displaystyle\int_a^b(\alpha f+\beta g)$ converge également et on a
>
> $$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Preuve.
Simple retour à la définition. On remplace b par $x\in[a,b[$ pour intégrer sur un segment. La linéarité de l'intégrale s'applique alors et le théorème est une conséquence de du théorème de combinaison linéaire de limites finies. ∎

> **II.1.5 Théorème**
> Soit $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

Preuve.

— Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Notons $f_+ : x \mapsto \max(f(x),0)$ et $f_- : x \mapsto \min(f(x),0)$ les fonctions qui valent respectivement $f(x)$ ou 0 suivant que $f(x)$ est positif ou négatif.

Alors $f = f_+ + f_-$ et $|f| = f_+ - f_-$. Si on suppose que f est intégrable sur I, vu que $f_+ \leqslant |f|$ et $-f_- \leqslant |f|$, les intégrales de f_+ et $-f_-$ convergent et par combinaison linéaire l'intégrale de $f_+ - (-f_-) = f$ converge.

— Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Notons $f = u+iv$ la forme algébrique de f. Alors $|u| \leqslant |f|$ et $|v| \leqslant |f|$. Par comparaison de fonctions à valeurs positives, u, v sont d'intégrales convergentes sur I et donc $f = u+iv$ aussi. ∎

II.1.6 Exemple
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

II.2 Comparaison

II.2.1 Théorème (Comparaison)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{K})$ des fonctions continues.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
2. Si $f = O_b(g)$ et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
3. Si $f = o_b(g)$et g est intégrable sur $[a,b[$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.
4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ ssi g est intégrable sur $[a,b[$.

Le résultat vaut encore pour des fonctions définies sur $]a,b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a.

Preuve.

1. Plaçons nous sur un intervalle $[c,b[$ où $|f| \leqslant |g|$. Les intégrales $\int\limits_a^b |f|$ et $\int\limits_c^b |f|$ ont la même nature.

   Pour $x \in [c,b[$ on a, par croissance de l'intégrale sur un segment (on intègre "dans le bon sens"), $\int\limits_c^x |f| \leqslant \int\limits_c^x |g|$. Or $x \mapsto \int\limits_c^x |g|$ est croissante et possède une limite finie, donc est toujours inférieure à cette limite.

   Ainsi $x \mapsto \int\limits_c^x |f|$ est croissante ($f \geqslant 0$) et majorée donc possède une limite finie en b (la borne supérieure de son intervalle de définition). Ainsi $\int\limits_c^b |f|$ converge (et est $\leqslant \int\limits_c^b |g|$) et donc $\int\limits_a^b |f|$ converge.
2. Dans le cas où $f = O_b(g)$ on a $|f| \leqslant M|g|$ au voisinage de b pour un $M \in \mathbb{R}+$ fixé.

   Par produit d'une limite par une constante, $\int\limits_a^b M|g(t)|\mathrm{d}t$ converge et par la point précédent, $\int\limits_a^b |f|$ converge.
3. On a dans ce cas $f = O_b(g)$
4. On a dans ce cas $f = O_b(g)$ et $g = O_b(f)$. ∎

II.2.2 Négligeabilité

Si on a $f = o_b(g)$ et $\int\limits_a^b g$ converge (avec g une fonction positive de référence) alors $\int\limits_a^b f$ converge. Dans la pratique, on utilisera très souvent ce fait.

Exemple : $\frac{1}{t^t} = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ donc $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^t}\mathrm{d}t$ converge par comparaison de fonctions positives.

II.2.3 Divergence

On peut tout à fait appliquer les contraposées des points 1 et 2 pour prouver la divergence d'une intégrale d'une fonction positive. Par exemple, si $f = o_b(g)$ et $\int_a^b f$ diverge (avec f positive, fonction de référence), alors $\int_a^b g$ diverge (raisonnement par l'absurde).

II.2.4 $t^\alpha f(t)$

1. En 0 Pour la convergence en 0, si $t^{\frac{1}{2}}f(t) \underset{0}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1-\varepsilon}f(t) \underset{0}{\to} 0$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé alors l'intégrale de f converge en 0 (si f est positive...)
2. En $+\infty$ si $t^2 f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ ou plus généralement $t^{1+\varepsilon}f(t) \underset{+\infty}{\to} 0$ alors l'intégrale de f converge en $+\infty$.
3. De manière plus générale, si on peut déterminer $\lim_{0 \text{ ou } +\infty} t^\alpha f(t)$ en fonction de la valeur de α alors on pourra souvent conclure sur la convergence en 0 ou en $+\infty$.

II.2.5 Application à la preuve de divergence

En $a=0$ comme en $a=+\infty$, si on a $tf(t) \underset{t\to a}{\to} +\infty$ on peut conclure à la divergence de l'intégrale de f. Par exemple $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}dt$ diverge.

II.2.6 Exemple

Discuter suivant la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ la convergence de de $\int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On pose $f_\beta : t \mapsto t^{\beta-1}e^{-t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$ dans le cas général (pas en 0, à cause du cas $\beta-1<0$). Alors $f_\beta(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$ car $t^2 f_\beta(t) \underset{+\infty}{\to} 0$. Ainsi l'intégrale converge en $+\infty$ par comparaison de fonctions positives.

En 0, on a $f_\beta(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$. L'intégrale converge ssi $\alpha > 0$ d'après le théorème précédent et par comparaison de fonctions positives.

II.2.7 Exemple

Montrer (enfin !) que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

Le calcul de la valeur est un exercice classique.

Preuve.
Voici une preuve en plusieurs étapes.

— Montrons que $\forall x > -1 \ \ln(1+x) \leqslant x$ (avec égalité seulement en 0).
Remarquons d'abord que $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, ce qui nous permettra d'utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[0,x]$ ou $[x,0]$. De plus sa dérivée est $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est décroissante sur $]-1,+\infty[$
Si $x>0$, on a $f'(x) \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant f'(0)$ ce qui donne $\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$ qui est CQFD. Si $x<0$, on a $f'(1) \leqslant \frac{f(0)-f(x)}{0-x} \leqslant f'(x)$ ou encore $1 \leqslant \frac{-\ln(1+x)}{-x}$ ou encore $-x \leqslant -\ln(1+x)$ car $-x>0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $t \in [0,\sqrt{n}[$, on a alors $\pm\frac{t^2}{n} \in]-1,+\infty[$ et donc $\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \leqslant \frac{t^2}{n}$ et $\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -\frac{t^2}{n}$.
Ainsi, $n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2 \leqslant -n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$. En passant à l'exponentielle qui est croissante,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

— La relations qui précède est encore vraie pour $t=\sqrt{n}$, et en intégrant on obtient :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}_{I_1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t}_{I_2}$$

En posant $t=\sqrt{n}\cos(u)$ dans I_1 (possible d'après les valeurs prises par t), on a $\mathrm{d}t = -\sqrt{n}\sin(u)\mathrm{d}u$ et donc $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\sqrt{n}\sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u$.

En posant $u=\sqrt{n}\tan(u)$ dans I_2 on obtient $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\mathrm{d}u$ car $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2} = \tan'$.

— Si on note $W_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ (par changement de variable $\frac{\pi}{2}-t$), on a $I_2 \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$ (car on intègre une fonction positive sur un segment plus petit) et donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$$

D'après l'étude des intégrales de Wallis, $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et par encadrement $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ∎

II.2.8 Proposition

$L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est encore intégrable.

Preuve.
1. La fonction nulle est clairement intégrable sur I et son intégrale vaut 0.
2. Soient $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.
Montrons que $\lambda f+\mu g$ est encore intégrable. Comme $|\lambda f+\mu g| \leqslant |\lambda||f|+|\mu||g|$ on peut se ramener au cas où f,g sont des fonctions à valeurs réelles et positives (par comparaison de fonctions positives).
Supposons donc que $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ sont intégrables (le raisonnement est similaire en a). On a, pour $x \in [a,b[$, $\displaystyle\int_a^x (\lambda f+\mu g) = \lambda\int_a^x f + \mu\int_a^x g$ qui converge bien quand $x \to b^-$ par combinaison linéaire de limites finies. ∎

III Exemples importants

III.1 Application aux séries numériques

III.1.1 Théorème
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$

Preuve.
Pour un $N > n_0$ on a, (faire un schéma. La preuve est la décroissance de f et la croissance de l'intégrale), $\displaystyle\int_{n_0+1}^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{N} f(t)\mathrm{d}t$.

Ainsi la suite des sommes partielle est majorée ssi $x \mapsto \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée (il suffit de majorer les valeurs aux entiers car cette fonction est croissante). ■

III.1.2 Exemple
On prouve de cette manière la convergence et la divergence des séries de Riemann.

III.1.3 Application aux séries divergentes

On souhaite donner un équivalent de $\ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Or, pour $k \geqslant 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ car ln est croissante sur $[k-1, k]$ et sur $[k, k+1]$.

En sommant de 2 à n on obtient $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t$ ie $n\ln(n) - n + 1 \leqslant n! \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2$.

On en tire classiquement $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

III.1.4 Restes d'une série convergente

On cherche un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Avec $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ on a (cf DM) $S_n + R_n = \frac{\pi^2}{6}$ et donc $|S_n - \frac{\pi^2}{6}| = |R_n|$ où $R_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. R_n représente en fait la qualité de l'approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ par la somme finie S_n.

Pour $k > n$ (on fixe $n \geqslant 1$ pour l'instant), on a classiquement $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et en sommant de $n+1$ à $+\infty$, $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$ et donc $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (multiplier l'encadrement par n + théorème d'encadrement).

III.2 Intégrales classiques

III.2.1 Fonction Γ

Reprenons II.2.6. On pose, pour $\beta > 0$, $\Gamma(\beta) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Donnons un lien entre $\Gamma(\beta+1)$ et $\Gamma(\beta)$

On a, pour $a > 0$ et $b > a$, $\displaystyle\int_{a}^{b} t^{\beta}e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{\beta}e^{-t}\right]_a^b + \int_{a}^{b} \beta t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Comme le crochet tend vers 0 en 0 et $+\infty$ ($\beta > 0$), $\Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta)$.

De plus, $\Gamma(1) = 1$ et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\Gamma(n) = (n-1)!$.

III.2.2 $\int_I f$ converge mais $\int_I |f|$ diverge

Comme pour les série numérique, ce n'est pas parce que f n'est pas intégrable que l'on peut déduire la divergence de l'intégrale de f. Voir les exemples de séries convergentes mais pas absolument convergentes.

Nous allons démontrer le résultat

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge}, \int_{0}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t diverge$$

Posons $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ qui est continue sur $I =]0, +\infty[$. On veut montrer que l'intégrale de f sur I converge mais que f n'est pas intégrable sur I.

1. Montrons que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
   (a) $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = 1$ par quotient d'équivalents et donc f est prolongeable par continuité en 0 et $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(b) Pour l'intervalle $[1,+\infty[$, nous allons effectuer une intégration par partie. Soit $A>1$.

Posons $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \mapsto \sin(t)$ qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1,A]$. Alors $u' : t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ convient. Par intégration par parties

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\cos(1)}{1} - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

Nous avons deux limites à étudier.

— Premièrement $0 \leqslant \left|\frac{\cos(A)}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$ et donc $\frac{\cos(A)}{A} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$ par encadrement.

— Deuxièmement, $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\forall t \geqslant 1$ $|g(t)|\frac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge et par comparaison.

Ainsi $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $A \to +\infty$.

Par somme, $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $A \to +\infty$ ie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Coin culture : cette intégrale s'appelle intégrale de Dirichlet et vaut $\frac{\pi}{2}$, fait qui peut faire l'objet d'un problème.

2. Montrons que f n'est pas intégrable sur I. Supposons qu contraire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ converge et donc que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Notons $u_N = \displaystyle\int_\pi^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ (il s'agit d'une suite convergence d'après notre hypothèse). On a

$$u_N = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t$$

Soit $k \in [\![1,N-1]\!]$ et $t \in [k\pi,(k+1)\pi]$. Alors $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}$ et par produit par $|\sin t| \geqslant 0$, $\frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}$.

Ainsi, par croissance de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k+1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t$.

De plus, si k est pair, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = 2$ et si k est impair, alors $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} -\sin(t)\mathrm{d}t = 2$.

Ainsi, par somme d'inégalité, $u_N \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k}$. On reconnaît une somme partielle de la série harmonique (privée de son premier terme), qui est notoirement divergente, ie $u_N \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$. Contradiction.

III.2.3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge mais $f \not\to 0$

Nous n'avons pas de critère aussi facile que la divergence grossière des séries pour les intégrales.

Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge. $f : t \mapsto \sin(e^t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Posons $u = e^t$ et donc $t = \ln(u)$ (ce qui prouve que le changement de variable est bijectif). Alors $\mathrm{d}t = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$ et notre intégrale à la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(u)\frac{1}{u}\mathrm{d}u$. D'après le point précédent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge.

Cependant, f ne possède pas de limite en $+\infty$ (car $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.)

Index