Table des matières

Dans tout le chapitre, on s'intéresse exclusivement aux espaces $\mathbb{R}^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition-Proposition
Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$(X|Y) = \langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $(u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0_{\mathbb{R}}$.
4. Définie : $(u|u) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Notations : le produit scalaire canonique est noté au choix $\langle u, v\rangle$, ou $u \cdot v$.

Preuve.
La bilinéarité est évidente par la formule de produit matriciel.

De plus, $X^T Y$ est un nombre donc $(X^T Y)^T = Y^T X = \langle Y, X\rangle$.

Remarquer que $\langle X, X\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est une somme de réels positifs donc est forcément positive, et elle ne vaut 0 que si tous les termes sont nuls. ∎

I.1.2 Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont de produit scalaire nuls dans $\mathbb{R}^4$.

I.2 Norme et distance

I.2.1 Définition

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

I.2.2 Proposition
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$

1. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$
2. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
3. $(x|y) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

Preuve.
Calculs directs. ∎

I.2.3 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

$$|(u|v)| \leqslant \|u\|\|v\|$$

Il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve.
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ fixés.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (u + tv|u + tv) \end{array} \right.$.

Alors $f \geqslant 0$ par positivité du produit scalaire. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u + tv|u + tv) = (u|u + tv) + t(v|u + tv) = (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

— Si $v \neq 0$ (ie $\|v\| \neq 0$), alors f est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$, ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

— Si $v = 0$, alors $(u|v) = 0$ et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas, $v \neq 0$, l'inégalité est une égalité ssi $\Delta = 0$ ssi f s'annule une fois ssi $\exists t \in \mathbb{R}\ u + tv = 0$ (norme nulle). Ainsi u et v sont colinéaires

Dans le cas $v = 0$, l'égalité est tout le temps vérifié, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■

I.2.4 Exemple

$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ en prenant $X = \begin{pmatrix}\sqrt{1}\\ \vdots \\ \sqrt{n}\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ n\end{pmatrix}$.

I.2.5 Corollaire (Minkowski)

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$

Preuve.
On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'inégalité voulue.

Il y a égalité ssi $(u|v) = \|u\|\|v\|$. Dans ce cas, on a d'après le théorème **??**, $u = \lambda v$ ou $v = 0$ et donc $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$, ie $v = 0$ ou $\lambda \geqslant 0$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul.

Pour le deuxième point, on applique l'inégalité triangulaire à $\|(u - v) + v\|$ et à $\|(v - u) + u\|$. ■

I.2.6 Remarque

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

I.2.7 Proposition (Propriétés de la norme)

Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

II.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Soient $u, v, u_1, \ldots, u_n \in E$

1. On dit que u est unitaire, ou normé ssi $\|u\| = 1$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $(u|v) = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \ldots, u_n)$ est dite orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\ (u_i|u_j) = \delta_{i,j}$.

Explication La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à la géométrie de début d'année. On a pas du tout de notion d'angle.

II.1.2 Exemple

Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

II.1.3 Passer à une famille orthonormale

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors $(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \ldots, \frac{e_p}{\|e_p\|})$ est une famille orthonormale.

II.1.4 Proposition

Soit $(u_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est libre.

Preuve.
Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$. Alors en effectuant le produit scalaire par u_i on obtient $\lambda_i \|u_i\|^2 = 0$, d'où $\lambda_i = 0$. ■

II.1.5 Théorème (Pythagore)

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$$

Preuve.
Simple calcul de bilinéarité. ■

II.2 Bases orthonormées

II.2.1 Théorème
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormale** de $\mathbb{R}^n$. Soient $u, v \in E$.

1. $u = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée [1] de u sur le vecteur e_i est $(u|e_i)$.
2. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(u|v) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$
3. Si on note $X = \mathrm{Mat}_B(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ (les colonnes des coordonnées), $(u|v) = X^TY$.

Preuve.
1. On a $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Ainsi $(u|e_1) = x_1(e_1|e_1) + x_2(e_2|e_1) + \ldots x_n(e_n|e_1) = x_1$ (par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
2. On a par le même calcul $(u|v) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_iy_j(e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ car tous les autres termes sont nuls.

II.2.2 Exemple
Montrer que la famille $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$ (pour le produit scalaire canonique).

Donner les coordonnées de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

II.2.3 Corollaire
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$.

Preuve.
On a en effet, pour un $j \in [\![1,n]\!]$ fixé $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_j)|e_i)e_i$ d'après le théorème précédent. ■

II.2.4 Mnémotechnie

Pour calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}$, *a priori* on calcule les coordonnée de $f(e_j)$ pour trouver la $j$ème colonne. Utile pour se souvenir sur quel indice porte l'application de f.

II.3 Orthogonal d'un sev

II.3.1 Définition
Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que $u \in E$ est orthogonal à F ssi $\forall u_F \in F$ $(u|u_F) = 0$
2. F et G sont dits orthogonaux ssi $\forall (u_F, u_G) \in F \times G$ $(u_F|u_G) = 0$.

II.3.2 Exemple
Trouver un exemple dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique. Preuve avec les bases, avec les équations.

II.3.3 Remarque

Si $F \perp G$ alors $F + G = F \oplus G$ car le seul vecteur orthogonal à lui même est le vecteur nul.

II.3.4 Proposition
Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_s)$.

1. Soit $u \in E$, $u \perp F$ ssi $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $u \perp f_i$.
2. $F \perp G$ ssi $\forall i \in [\![1,r]\!] \forall j \in [\![1,s]\!]$ $f_i \perp g_j$.

Il suffit de vérifier l'orthogonalité sur une famille génératrice pour prouver l'orthogonalité à un espace.

Preuve.

1. Si $x_F \in F$ alors $x_F = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i$ et on a $(u|x_F) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u|f_i)$. Ceci prouve facilement la seule implication non triviale.
2. $\Rightarrow$ est triviale. Pour la réciproque, on a d'après le point précédent $f_i \perp G$ pour tout i. Par linéarité du produit scalaire, tout $u_F \in F$ est alors perpendiculaire à G, par le même calcul qu'au point précédent.

II.3.5 Définition
Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E | \ \forall x_F \in F \ (x_F|x) = 0\}$. $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

II.3.6 Remarque

Si on a $G \perp F$ pour deux espaces alors, par définition de $F^\perp$, $G \subset F^\perp$.

II.3.7 Exemple

1. $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
2. Calculer l'orthogonal de la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$.

II.3.8 Attention

On considère D une droite de l'espace et F un sev de $\mathbb{R}^3$. On peut avoir $D \perp F$ sans que $F = D^\perp$. En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de D est un plan.

II.3.9 Proposition
Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$.

1. $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
2. $F \oplus F^\perp = E$ ie F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.
3. $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F qui lui soit orthogonal. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

Preuve.
Le seul vecteur orthogonal à lui même est $0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $F \cap F^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Montrons que $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et que $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$. Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F et $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^r \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, e_r \rangle \end{pmatrix} \end{cases}$.

Par linéarité de chaque coordonnées, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$ et $F^\perp = \ker(f)$ d'après **??**. Ainsi $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Considérons $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_r$ la base canonique de $\mathbb{R}^r$. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_r}(f)$. Alors les lignes de M sont les coordonnées des e_i, notées en lignes. Ainsi elles forment une famille libre et $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f) = r$.

D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = n - \dim(\ker(f))$ et donc $\dim(F^\perp) = n - r$ comme voulu.

Ainsi $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.

Finalement, si G est un supplémentaire de F tel que $G \perp F$ alors $G \subset F^\perp$ par définition de $F^\perp$ et $\dim(G) = \dim(F^\perp)$ (en tant que supplémentaires d'un même espace F) et donc $G = F^\perp$ ce qui prouve l'unicité voulue. ∎

II.3.10 Exemple

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de $D : 2x - y = 0$ (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Dans $\mathbb{R}^3$, même question avec $D = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $P : 2x + z = 0$.

II.3.11 Exemple
Projection et symétrie dans le cas où $G = F^\perp$: illustration et traduction des conditions géométriques pour calculer p.

III Matrices particulières

III.1 Matrices orthogonales

III.1.1 Définition
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi $MM^T = I_n$. On a alors $M^T M = I_n$ et donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n.

III.1.2 Produit matriciel et produit scalaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C = AB$ et $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ les coefficients de A, B et C respectivement.

Alors, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

Notons de plus $L_1, \dots, L_n$ les colonnes de A et $C_1, \dots, C_n$ les lignes de B. Alors $L_i = (a_{i,1}\ a_{i_2}\ \dots\ a_{i_n})$ et $C_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$. Ainsi $c_{i,j} = L_i C_j = \langle {L_i}^T, C_j \rangle$.

III.1.3 Théorème
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. ${}^T M \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
4. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Pour toutes colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
6. Pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|MX\| = \|X\|$

Preuve.

— On a clairement 1) $\iff$ 2).

— D'après le point précédent, $M^T M = I_n$ ssi $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M. Ainsi 1 $\iff$ 3).

— Grâce à 1) $\iff$ 2) on a 3) $\iff$ 4) immédiatement.

— Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. A priori $\langle MX, MY \rangle = (MX)^T MY = X^T M^T MY$.
Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a bien $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
Réciproquement, supposons que $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour toute colonne X, Y. En notant $E_1, \dots E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (sous forme de colonnes) on a ${E_i}^T (M^T M) E_j = \delta_{i,j}$ (car la base canonique est orthonormée).
Or pour une matrice $A = (a_{i,j})$, ${E_i}^T A E_j = a_{i,j}$ par calcul direct. Ainsi $M^T M = I_n$.
On a bien 1) $\iff$ 5).

— 5) $\Rightarrow$ 6) est trivial. La réciproque est la conséquence directe de l'identité de polarisation $\langle X, Y \rangle = \frac{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2}{2}$

III.1.4 Exemple

1. I_n, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.
2. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$
3. Quelle est la méthode la plus efficace pour vérifier qu'une matrices est orthogonale ?

III.1.5 Proposition
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$\mathcal{B}$ est une base orthonormée ssi $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ (la matrice de passage) est orthogonale.

Preuve.
Simple traduction du théorème précédent. ■

III.1.6 Changement de bases orthonormales

Soit $\mathcal{B}$ une BON de $\mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$ sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors

$$X = PX' \text{ ie. } X' = P^{-1}X = P^T X$$

III.1.7 Proposition
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

Preuve.
Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^T A = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Si on a également $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB^T(AB) = AB^T B^T A = A {I_n}^T A = I_n$ de donc AB est orthogonale. ■

III.1.8 Interprétation géométrique

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi M^{-1} est la matrice de la base canonique dans une BON et c'est une matrice orthogonale.

III.1.9 Théorème
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = \pm 1$

Preuve.
On adet$(M) = \det(M^T)$ et $M^T = M^{-1}$. Ainsi $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ et finalement $\det(M) = \pm 1$ ∎

III.1.10 Définition
$SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) | \ \det(M) = 1\}$.

III.1.11 Exercice
Montrer que $SO(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

III.1.12 Définition
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

III.1.13 Proposition
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe et obtenir toujours la même valeur.

Preuve.
SI M est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est $M' = PM$. Comme $\det(P) = 1$, $\det(M') = \det(M)$. ∎

III.2 Matrices symétriques réelles

Rappel : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique peut se calculer par $(X|Y) = X^T Y$.

III.2.1 Définition
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

III.2.2 Exercice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique ssi $P^T AP$ est symétrique.

III.2.3 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ (pour le produit scalaire canonique).

Preuve.
1. Si A est symétrique, alors $(AX|Y) = {}^T(AX)Y = X^T A^T Y = X^T AY = (X|AY)$ pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
2. Réciproquement, supposons que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $(AX|Y) = (X|AY)$ ie $X^T A^T Y = X^T AY$ Montrons que $A^T = A$.
   On a, pour tout X, Y, ${}^T X({}^T A - A)Y = 0$ ou encore $(X|({}^T A - A)Y) = 0$. Ainsi, pour Y fixé, $({}^T A - A)Y$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ donc est nul. On a donc $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ $({}^T A - A)Y = 0$ et donc $({}^T A - A)$ est d'image nulle. C'est la matrice nulle.

On a prouvé de manière plus générale que $(X|AY) = (A^T X|Y)$ et $(AX|Y) = (X|A^T Y)$. ∎

III.2.4 Théorème
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.
1. Hors programme. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (c'est possible dès que $n \geqslant 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors $AX = \lambda X$.

Alors $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors $(AX)^T\overline{X} = \lambda X\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$. De plus, $(AX)^T\overline{X} = X^T A\overline{X} = \overline{\lambda} X^T\overline{X} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$.

Comme $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$ on a bien $\overline{\lambda} = \lambda$.

2. Calculons $(AX_1|X_2)$ de deux manières. On a d'une part $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$ et d'autre part $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$. Ainsi $(\lambda_1-\lambda_2)(X_1|X_2) = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(X_1|X_2) = 0$.

III.3 Théorème spectral

III.3.1 Théorème
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Alors A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Preuve.
Hors programme.

Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ car les valeurs propres de A sont réelles. Notons T une matrice triangulaire supérieure semblable à A via la matrice de passage P : $T = P^{-1}AP$. Toutes les matrices sont à coefficients réels.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$ des colonnes de P pour obtenir une famille orthonormale $\mathcal{B}'$ de matrice O dans la base canonique. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \Delta O$ où Δ est triangulaire supérieure et O orthogonale.

On obtient $T = \Delta^{-1}O^{-1}AO\Delta$ ie $\Delta T\Delta^{-1} = {}^TOAO$ est à la fois une matrice symétrique et triangulaire supérieure. Elle est donc diagonale et A est semblable à une matrice diagonale !

III.3.2 Remarque

Si A est symétrique et f est son endomorphisme canoniquement associé, il existe une BON dans laquelle la matrice de f est diagonale.

III.3.3 Exemple
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser (dans une BON).

III.4 Trouver une base orthonormée

III.4.1 Produit vectoriel

Diagonaliser dans une BON la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On utilise le produit vectoriel.

III.4.2 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors il existe une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F vérifiant

— $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale

— $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On peut imposer $\|u_i\| = 1$, c'est à dire que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|u_k) > 0$ pour tout k, alors la famille obtenue est unique.

Preuve.
Dessin

On note $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et on pose P_k : "il existe une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_k)$ telle que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = F_k$"

— P_1 est clairement vraie, il suffit de poser $u_1 = e_1$. (ou $\frac{e_1}{\|e_1\|}$).
Il existe clairement un seul vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1)$ de norme 1 et tel que $(u_1|e_1) > 0$, et c'est $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ (et on a $(e_1|u_1) = \|e_1\| > 0$).

— Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose que P_k est vraie.
On remarque d'abord que $e_{k+1} \notin F_k$, d'après la liberté de la famille $(e_i)_i$. On cherche u_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - x$, avec $x \in F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On écrit donc $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} u_i$. On veut maintenant

$$\forall i \in [\![1, k]\!]\ (e_{k+1} - x|u_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in [\![1, k]\!](e_{k+1}|u_i) - \alpha_{ik}\|u_i\|^2 = 0$$

On pose donc $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_{k+1}|u_i)}{\|u_i\|^2} f_i \neq 0$ car $e_{k+1} \notin F_k$. C'est un vecteur de F_{k+1} mais pas de F_k, donc $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = F_{k+1}$.
Tout vecteur de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k)$ s'écrit $\lambda e_{k+1} - x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in F_k$. Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les u_i pour $i \in [\![1, k]\!]$ est de la forme λu_{k+1}. Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que $(u|e_{k+1}) > 0$ dans $\mathbb{R}f_{k+1}$, c'est le vecteur $\pm\frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de F existe.

III.4.3 Exemple
On considère $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = UU^T$. Diagonaliser A.

On trouve que 0 est valeur propre associée à un espace de dimension 3, $E_0(A) = \ker(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Comme $\mathrm{tr}(A) = 7$ est également la somme des racines du polynôme caractéristique, 7 est racine. Nous savons que $E_7(A)$ est l'orthogonal de $E_0(A)$: $x - y - z - 2t = 0$ et donc $E_7(A) = \mathrm{Vect}(U)$.

Trouvons une base orthogonale de A. On note u_1, u_2, u_3 les 3 vecteurs trouvés et on cherche une base v_1, v_2, v_3 orthogonale de $F = E_0(A)$.

On pose déjà $v_1 = u_1$. On cherche maintenant $v_2 \in E_0(A)$ orthogonal à v_1. On le cherche sous la forme $v_2 = u_2 - \alpha v_1$. Alors $v_2 \perp v_1 \iff \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \iff \langle u_2, v_1 \rangle - \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff 1 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$.

Ainsi $v_2 = u_2 - \frac{v_1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

On cherche maintenant v_3 orthogonal à la fois à v_1 et v_2 sous la forme $v_3 = u_3 - av_1 - bv_2$. Le même raisonnement donne $\langle u_3, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle = 0$ ou encore $2 - 2a = 0$ ie. $a = 1$. De même $v_3 \perp v_2 \iff \langle u_3, v_2 \rangle - b \langle v_2, v_2 \rangle = 0 \iff 1 - \frac{3}{2}b = 0 \iff b = \frac{2}{3}$. Finalement $v_3 = u_3 - v_1 - \frac{2}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

IV Coniques

Changement de repère, rappel

On se place dans $\mathbb{R}^2$ (par exemple) et on considère une base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ Ainsi que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ (dont les colonnes sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si ces vecteurs étaient notés sous forme de colonne).

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de X dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Alors $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$

IV.1 Forme réduite

IV.1.1 Définition
Une conique de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

IV.1.2 Exemple
Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

IV.1.3 Définition
Soient $a, b, p > 0$. On appelle équation réduite de conique les équations suivantes :

— $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)

— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)

— $y^2 = 2px$ (parabole)

IV.2 Tracés des formes réduites

IV.2.1 Ellipse

On souhaite tracer dans le repère canonique l'ellipse d'équation réduite $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pour $a, b > 0$ donnés.

Remarquons que pour un point $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a $M \in C \iff \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ssi il existe un θ dans $[-\pi, \pi]$ tel que $x = a\cos\theta$ et $y = b\sin\theta$.

On étudie donc la courbe paramétrée $f_E : \begin{cases} [-\pi, \pi] & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \mapsto \quad \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \end{cases}$. Notons $M(t)$ le point de paramètre t. On trouve directement que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Ox) et que $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Oy).

Finalement on étudie f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les deux fonctions coordonnées, notées x et y encore, (on a changé la signification des notations ici. Avant x, y étaient des nombres, maintenant ce sont des fonctions) sont $\mathcal{C}^1$ et leurs variations sont du cours

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	b
$y'(t)$		$+$	0

On observe ainsi une tangente verticale en $t = 0$ (dirigée par $f'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$) et une tangente horizontale en $t = \frac{\pi}{2}$

Il n'y a pas de limites infinies dans la tableau de variations, donc aucune étude de branche infinie n'est nécessaire.

On trace d'abord un premier quart d'ellipse, et le reste du tracé est assez évident par les deux symétries exhibées qui ne modifient pas les directions des tangentes, mais seulement les points où on les trace.

Pour l'exemple, on a tracé $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.

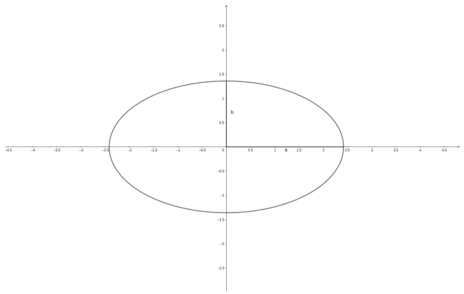

FIGURE 1 – Ellipse d'équation $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

IV.2.2 Hyperbole

On s'intéresse cette fois à $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. On ne donnera par de paramétrisation complète de cette hyperbole.

Par contre, remarquons que H est symétrique par rapport à (Oy) car $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \iff \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \in H$.

Ainsi, on va paramétrer la moitié de H donnée par $H_+ : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $x \geqslant 0$. Comme remarque préliminaire à notre paramétrage, remarquons que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Ainsi tout réel donné peut se mettre sous la forme $\mathrm{sh}(t)$ pour un t bien choisi (et unique).

Posons $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors $M \in H_+ \iff \exists t \in \mathbb{R}\ \frac{y}{b} = \mathrm{sh}(t)$ et $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \mathrm{sh}^2(t) = 1$ ssi $\exists t \in \mathbb{R}\ y = b\,\mathrm{sh}(t)$ et $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \mathrm{ch}^2(t)$. Comme les points de H_+ ont une abscisse positive, on peut donc écrire $M \in H_+ \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$.

Dans la ligne du point précédent, on note f la courbe paramétrée correspondante et x, y deviennent les fonctions coordonnées de f. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note maintenant $M(t) = f(t)$. On a $M(-t)$ qui est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Ox). f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ et on obtient très facilement les variations.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\Vert$
$x(t)$	a	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	

On observe une tangente verticale en $t = 0$ et nous avons une étude de branche infinie quand $t \to +\infty$ à effectuer.

— on a $x(t) \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et $y(t) \underset{+\infty}{\to} +\infty$, il faut évaluer la limite de $\frac{y}{x}$

— De plus, $x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{ae^t}{2}$ car $e^{-t} = o_{+\infty}(e^t)$ et $y(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{be^t}{2}$. Ainsi $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\to} \frac{b}{a}$. On ne peut toujours pas conclure, il faut évaluer la limite de $y - \frac{b}{a}x$.

— Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) - \frac{b}{a}x(t) = b(\mathrm{sh}(t) - \mathrm{ch}(t)) = -be^{-t} \underset{+\infty}{\to} 0$.

Finalement, le support de f admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{b}{a}x + 0$ (Attention aux notations classiques ici, les lettres x, y représentent des nombres qui sont deux inconnues/variables muettes de notre équation de droite)

Remarque : comme $y(t) - \frac{b}{a}x(t) < 0$, le support de la courbe est en fait en dessous de son asymptote.

Traçons maintenant. On remarque que l'asymptote trouvée passe par l'origine et le point de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ainsi, pour effectuer la première symétrie (par rapport à (Ox)), on tracera la droite passant par l'origine et $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ pour obtenir la deuxième asymptote. un calcul immédiat (de symétrie, sur les coordonnées des points) montre que le symétrique de H_+ par rapport à (Oy) possède les deux mêmes asymptotes.

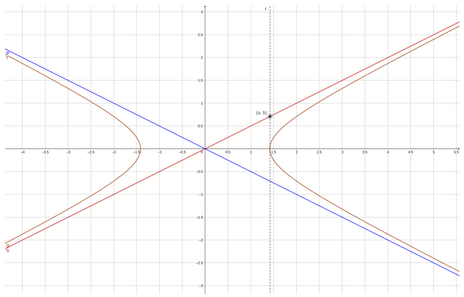

FIGURE 2 – Hyperbole

Exercice 1
Montrer que l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ peut se paramétrer par $x = \frac{a}{\cos t}, y = b \tan t$ pour t dans un intervalle à préciser.

IV.2.3 Parabole

On trace ici la parabole d'équation réduite $y^2 = 2px$ où $p > 0$. Pour retrouver une équation classique, on peut se placer dans le repère $(O, -\vec{\jmath}, \vec{\imath})$

On peut paramétrer par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix}$.

Une deuxième méthode, plus rapide, consiste à effectuer le changement de repère donné par la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ Reconnaître la rotation. Ainsi en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de M dans le repère canonique et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de ce même point dans le nouveau repère, on a $X = PX'$ ou encore $\begin{cases} x = -y' \\ y = x' \end{cases}$ et l'équation devient $(x')^2 = -2py'$ ou encore $y' = -\frac{1}{2p}(x')^2$ et on retrouve une parabole du cours de seconde.

Remarquons pour le tracé, que dans le repère canonique, notre parabole passe par l'origine (tangente verticale) et les deux points $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ \pm p \end{pmatrix}$

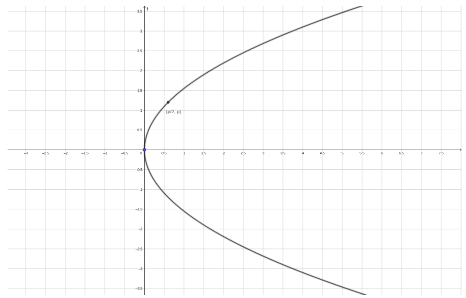

FIGURE 3 – Parabole d'équation $y^2 = 2px$

IV.3 Réduction d'une conique

IV.3.1 Ecriture matricielle

Fixons les coefficients d'une équation de conique.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Alors $X^T AX = ax^2 + bxy + cy^2$. Ainsi en posant en plus $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff X^T AX + LX + f = 0$$

Le but est maintenant de diagonaliser A, ce qui fait disparaître le terme "rectangle" en xy.

D'après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l'équation n'a plus de terme en xy.

IV.3.2 Après rotation

Comme A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons λ, μ ses valeurs propres. On suppose $\lambda \neq \mu$ (sinon, A était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons P la matrice de passage (qui diagonalise A).

Posons $X' = P^{-1}X = P^T X$ ie $X = PX'$, les coordonnées de X dans la nouvelle base.

$X^T AX + LX + f = 0 \iff (PX')^T APX' + LPX' + f = 0 \iff {}^T X'DX' + (LP)X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ où $LP = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$.

1. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.
2. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on passe sous forme canonique (pour x et y, attention à bien factoriser par λ et μ) pour obtenir soit une équation d'ellipse soit une équation d'hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).

   Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l'ensemble vide ou deux droites sécantes.

IV.3.3 Exemple

Tracer les coniques $3x^2 + 4xy + 3y^2 = \pm 1$, $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = \alpha$.

On obtient d'abord l'ensemble vide, puis une ellipse (rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$)

Pour la seconde, la matrice est $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(A_2) < 0$, on obtient une conique de type hyperbole. Les valeurs propres sont les racines de $X^2 + X - 6$ qui sont 2 et -3.

$E_2(A_2) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v})$.

L'équation dans le nouveau repère devient $2x'^2 - 3y'^2 + 2(\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}) - 4\frac{-x'+2y'}{\sqrt{5}} = \alpha$ c'est à dire $2x'^2 - 3y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' = \alpha \iff 2(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{8}{5} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{3}{5} = \alpha \iff 2(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 - \frac{9}{10} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \alpha + 1$

On obtient une hyperbole ou la réunion de deux droites suivant la valeur de α.

IV.3.4 Méthode

Pour réduire une équation de conique :

1. Diagonaliser A, puis écrire l'équation dans le nouveau repère.
2. Passer sous forme canonique en x et y (ou seulement l'un des deux).
3. Exhiber l'éventuel centre, faire le tracé dans le nouveau repère.

Index