Devoir surveillé n°4

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge.
2. Un peu de trigonométrie.
   (a) Rappeler le développement en série de e^z où $z \in C$.
   (b) En utilisant les formules d'Euler, retrouver les développement en série de $\cos$ et $\sin$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\det(A)$. Préciser également si A est diagonalisable.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Par intégration par parties, montrer que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
   (c) Calculer I_2, I_4, I_6 et donner une expression de I_{2p} pour $p \in \mathbb{N}$ (sans preuve) sous forme de produit puis comme quotient faisant apparaître des factorielles mais pas d'autre produit.

Exercice 2

Partie 0 : question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f) \; g(x) \in E_\lambda(f).$$

Partie I

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.
   Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et g.
4. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.
2. Soient $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i.$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

avec $f^0 = Id$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f^k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

(a) Montrer que f et u commutent.

(b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A.

(b) Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4.$$

(c) En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B.

4. On revient à un espace général E. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

(a) Quelle est la dimension de E_{λ_i}, le sous-esapce propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

(b) En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

(c) g est-il diagonalisable ?

(d) On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{C}^n \\ P & \mapsto & (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$$

i. Vérifier que l'application φ est linéaire.

ii. Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

iii. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} P(\lambda_i) = \mu_i$$

(e) Déduire des questions précédente qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.

5. On considère la matrice $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Déterminer une matrice Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.

(b) Vérifier que les colonnes de Q forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ et proposer une valeur de Q telle que la base des colonnes soit orthonormale.

(c) On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant la question 4 que si une telle matrice N existe alors

— $Q^{-1}NQ$ est diagonale.

— Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$N = \alpha I_2 + \beta M$$
où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

(d) Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Exercice 3

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Les X_i représentent la répétition d'une même expérience aléatoire : la ième expérience est un succès si et seulement si X_i prend la valeur 1.

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. On pose également $q = 1 - p$

1. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ainsi que son domaine de convergence.
2. Montrer que pour $m \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in]-1,1[\ \frac{m!}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} x^{k-m}$$
3. Nous allons retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
   (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ en précisant le domaine de validité.
   (b) Retrouver le résultat de la question 2
4. On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ pour le reste de l'exercice. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant n} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$ converge et que sa somme vaut 1.
   On peut maintenant définir une variable aléatoire Y_n à valeurs dans $\{n, n+1, \dots\} = \mathbb{N} \cap [n, +\infty[$ par sa loi :
$$\forall k \geqslant n \ \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}.$$
5. Reconnaître la loi de Y_1. Expliciter le coefficient binomial sous forme de quotient simple pour les lois de Y_2 et Y_3.
6. Expliquer rapidement pourquoi $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
7. Pour $k \geqslant n$, calculer $\mathbb{P}(S_k = n \text{ et } S_{k-1} = n-1)$. Comment interpréter la loi de la variable Y_n ?
8. On pose Z_n la variable aléatoire dont la valeur est le nombre d'expérience nécessaire à l'obtention d'exactement n succès lors de notre répétition d'expérience (Z_n vaut le rang d'obtention du n-ème succès).
   (a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n ?
   (b) Sans utiliser la question 7, et en effectuant un raisonnement par dénombrement, montrer que Z_n suit la même loi que Y_n.
9. On considère la fonction génératrice de variable t réelle $\sum\limits_{k\geqslant n} \mathbb{P}(Y_n = k) t^k$ et on note f_n sa somme.
   Calculer le rayon de convergence R de cette série entière, et montrer en particulier que $R > 1$.
10. Calculer $f_n(t)$ pour $t \in]-R, R[$.
11. Montrer que Y_n est d'espérance finie et calculer $E(Y_n)$.
12. Montrer que Y_n est de variance finie et calculer $V(Y_n)$.