# Math C 2018

## Préambule

1. Il faut, entre autre un argument de continuité. Il ne s'agit pas d'une application de l'IAF en particulier (c'est l'une des hypothèses à vérifier pour appliquer l'IAF, pas sa conclusion).
2. On trouve 0. Attention à la rédaction de l'encadrement.
3. Assez évident en utilisant la question précédente.

## Partie I

1. (a) i. J'ai trouvé $2n$
      ii. Non indéterminée, cette fois.
      iii. Prolongement ?
   (b) Un peu de trigo pour simplifier ceci.
   (c) Encore !
   (d) Pour utiliser la question précédente, tenter de montrer que $I_{n+1} - I_n$ vaut 0
2. Le même argument vaut pour toutes. Voir l'exemple traité en cours.
3. Appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ : il faut d'abord prouver que $\varphi$ se prolonge apr continuité, puis que $\varphi'$ possède des limites finies aux bornes ouvertes. Le théorème conclut.
4. L'application du préambule est assez directe au vu de la question précédente.
5. (a) Indication dans l'énoncé. Voir le cours également.
   (b) Attention : on doit justifier de l'existence d'une certaine limite pour conclure proprement.
   (c) Combiner les questions !

## Partie II

1. (a) IPP et décomposer l'intégrale en somme grâce à Chasles.
   (b) Attention, il s'agit d'une convergence de série numérique. La suite à étudier est en fait la série étudiée....
   Pour la convergence de la série, majorer la valeur absolue du terme général : on ne peut souvent pas faire mieux face à sin ou cos.
   Pour la convergence de l'intégrale il y a un gros piège, voir le corrigé.
2. (a) D'Alembert, ou comparaison au TG d'une série convergente connue : la série entière dont la somme est $\mathrm{sh}(|a|)$.
   (b) Vérifier que le prolongement est compatible avec la somme de série.
   (c) Citer le théorème
3. (a)
   (b) Attention : on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme qui ne s'applique qu'à des séries entières : ici ce n'est pas la variable d'intégration qui est à la puissance n (l'indice).
   On utilise plutôt l'inégalité triangulaire sur les séries absolument convergente. Ensuite on intègre.
   (c) Simple application de la question 3a
   (d) Le cas particulier est gentiment donné. Remarquer qu'il se distingue du cas général exactement de la même manière que le cas $\alpha = 1$ se distingue des autres pour les intégrales de Riemann : la formule de primitive n'est pas valable.
   Pour distinguer suivant la parité, on peut par exemple écrire $n$ sous forme $2k$ ou $2k+1$ pour un $k \in \mathbb{N}$.
   (e) Question délicate, on ne peut toujours pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
   On calculera plutôt des sommes partielles et on utilisera 3b pour passer à la limite. Rappel : pour une série convergente, la suite des restes tend vers 0. On trouve

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ae^{-int}}\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = \frac{\pi}{2} - \int_0^a \psi(t)\mathrm{d}t$$

(f) i. Non vu en cours pour l'instant.
Pour les 5/2, il s'agit surtout de dominer l'intégrande par une fonction intégrable indépendante de $x$, ce qui est facile ici car on intègre sur un segment. Voir la question 1 du préambule.
ii. Ne pas oublier la dérivabilité.
iii. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ est la longueur de l'intervalle d'intégration.
iv. Découper l'intervalle d'intégration comme proposé, puis majorer l'intégrande de la première par sa valeur maximale obtenue grâce à la question 3f iii. La limite cherchée vaut 0.

(g) Passer sous forme algébrique $e^{it}$.

(h) Inégalité triangulaire et $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$.

(i) Combiner avec le résultat de $3e$