Concours blanc : Math C

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Dans cette exercice on identifie les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales. La partie II est indépendante des autres. On pourra utiliser librement les résultats de la partie I pour traiter la partie III.

Partie I : polynômes de Bernoulli

Dans cette première partie on étudie une suite de polynômes très utiles, ainsi que certaines de leurs propriétés.

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$.
   (a) On pose $G : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$.
   Préciser le lien entre f et G.
   (b) Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$. On exprimera F en fonction de G.

   On pose maintenant $B_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on définit le polynôme B_n par :
   $$B_n' = B_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$
   Cette suite de polynôme est bien définie d'après la question précédente.
2. Montrer que $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et expliciter B_2, B_3 et B_4.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.
4. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$. Cette relation est-elle valable pour $n = 0$? $n = 1$?
5. On définit une autre suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout n. Montrer que (C_n) vérifie les conditions définissant (B_n) et en déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \; B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$
6. Que peut-on en déduire concernant les courbes représentatives des fonctions B_n ? On distinguera les cas suivant la parité de n.
7. On suppose (dans cette question seulement) que n est impair et $n \geqslant 3$. Montrer que $B_n(0), B_n(\frac{1}{2}), B_n(1)$ sont nuls.
8. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. On pourra utiliser le théorème de Rolle.
9. En déduire que B_{2m+1} ne s'annule pas sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Partie II : fonction ζ

Le but de cette partie est définir une nouvelle fonction (au centre de nombreuses recherches en mathématiques)

1. Soit f une fonction continue et décroissante sur l'intervalle $[a,+\infty[$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Soit k un entier, $k \geqslant a+1$. Justifier que
   $$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$
   Un schéma sera apprécié, mais ne constitue pas une preuve.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α.

   En cas de convergence, on pose $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.
3. Montrer que pour $\alpha > 1$, $1 \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$. Qu'en déduire pour $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha)$?
4. En reprenant avec soin les calculs de la question 2, trouver un équivalent de $\zeta(\alpha)$ quand $\alpha \to 1$.

Partie III : Calcul de $\zeta(2m)$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$. Montrer que

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2. Soit $n > 0$. On définit sur $]0,1[$ la fonction $\varphi_n : t \mapsto \frac{B_n(t)-B_n(0)}{\sin(\pi t)}$. Montrer que $\forall t \in]0,1[\ \varphi_n(t) = (-1)^n \varphi_n(1-t)$.
3. Montrer que φ_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que f' est bornée sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left| \frac{1}{x} \int_0^1 f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \right| = 0$.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$. On pourra utiliser une intégration par parties.
5. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On pose $I_{n,k} = \int\limits_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$. Calculer $I_{n,0},\ I_{0,k},\ I_{1,k}$.
6. Pour $n \geqslant 2$ et $k > 0$, montrer que

$$I_{n,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k}).$$

7. En déduire l'expression, pour $p \in \mathbb{N}$ de $I_{2p+1,k}$ et montrer que

$$I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$$

8. Soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 1, exprimer en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$ la quantité

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\mathrm{d}t$$

   La réponse attendue ne contient pas le symbole $\int$
9. Montrer que $B_{2m}(0) = 2(-1)^{m-1}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$
10. Donner les valeurs de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 2

1. (a) Soit n un entier naturel non nul et $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$; Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k$ qui est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
   (b) En déduire, pour $t \in]0,1]$, l'expression de

$$\frac{1-(1-t)^n}{t}$$

   en fonction d'une somme.
   (c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t$$

   Étudier la convergence de l'intégrale I_n.
   (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   (e) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} \mathrm{d}t$$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.
   (b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.
   (c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

3. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$$

   (a) On fixe, seulement pour cette question $t \in [0, +\infty[$. Prouver l'existence et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.
   (b) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
   On admet que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$ pour la suite de l'exercice
4. Calculer $G_n(1)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(1)$. Avons nous bien $G_n(1) \underset{n \to +\infty}{\to} \Gamma(1)$?.
5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x :

$$G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

   (On pourra utiliser des intégrations par parties.)
6. On fixe un réel $x > 0$.
   (a) Montrer que $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$ est une série convergente.
   (b) Pour N un entier naturel non nul, on pose

$$P_N = \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

   Montrer que $(P_N)_{N \geqslant 1}$ est une suite convergente. On note classiquement

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} = \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}$$

   (c) Avec la même notation qu'a la question précédente, montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}$$

7. On peut montrer (mais pas aujourd'hui) la convergence d'un autre produit infini :

$$\forall x \in]0,1[\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi} = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

   En utilisant la question 5, montrer que pour $x \in]0,1[$ on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$