I Limite d'une suite

I.1 Convergence d'une suite

Définition 1
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

1. *On dit que la suite u tend vers l ou converge vers l si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.*
2. *On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ u_n \geqslant A$.*
3. *On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si $\forall B \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ u_n \leqslant B$.*

Si la suite u n'admet pas de limite, on dit qu'elle diverge. Dans le cas où u tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ on note $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$ ou $u_n \to l$.

On emploie aussi le mot "diverge" pour qualifier les suites de limite infinie.

Théorème 1
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. *Si $(u_n)_n$ admet une limite finie alors elle est bornée.*
2. *Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors elle est minorée (et possède même un minimum) et non majorée.*
3. *Si $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ alors elle est majorée (possède même un maximum) et non minorée.*

Lemme 1
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \varepsilon > 0 |x - y| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = y.$$

Théorème 2 (Unicité de la limite)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u possède une limite alors sa limite est unique.

I.2 Caractérisations de la convergence

Proposition 1
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - l = 0$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0$

Proposition 2
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. *La suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ ssi $(-u_n)_n$ tend vers $-\infty$.*
2. *Si $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n > 0$ (ou si (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang) alors on a équivalence $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.*
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n < 0$ (ou si (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang) alors on a équivalence $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.*

Théorème 3
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \overline{R}$.

$(u_n)_n$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent vers l.

II Limites et inégalités

II.1 Comparaison

Proposition 3
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose de plus que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2. *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*

Théorème 4 (Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ trois suites réelles telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si de plus les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(v_n)_n$ admet une limite et cette limite est l.

II.2 Utilisation des suites qui possèdent une limite

Proposition 4
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers l et $l' \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $l < l'$ alors il existe un rang à partir duquel $u_n < v_n$.

Théorème 5 (Passage à la limite des inégalités LARGES)
Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Soient en outre m, M des réels, $N \in \mathbb{N}$. Soient $l, l' \in \mathbb{R}$

1. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\lim_{+\infty} v_n = l'$ et si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leqslant l'$.*
2. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\forall n \geqslant N \ u_n \leqslant M$ alors $l \leqslant M$.*
3. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\forall n \geqslant N \ u_n \geqslant m$ alors $l \geqslant M$.*

III Existence de limites

III.1 Opérations

Proposition 5 (Somme de suites)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, $l, l' \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	??	$-\infty$

Théorème 6
Soit $(u_n)_n$ une suite tendant vers 0 et $(v_n)_n$ une suite bornée. Alors $(u_nv_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6 (produit de deux suites)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et $l, l' \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	0	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Autrement dit, dès qu'on peut faire le produit dans $\overline{\mathbb{R}}$, la limite existe et vaut ce produit.

Corollaire 1 (multiplication par un scalaire)
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$	λl	$+\infty$ *si* $\lambda > 0$ 0 *si* $\lambda = 0$ $-\infty$ *si* $\lambda < 0$	$-\infty$ *si* $\lambda > 0$ 0 *si* $\lambda = 0$ $+\infty$ *si* $\lambda < 0$

Proposition 7 (Inverse)
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. *Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ alors $(\frac{1}{u_n})_n$ converge vers $\frac{1}{l}$.*
2. *Si $(u_n)_n$ converge vers 0 et est de signe constant à partir d'un certain rang alors $(\frac{1}{u_n})_n$ tend vers $\pm\infty$ (même signe que u_n)*
3. *Si $(u_n)_n$ tend vers $\pm\infty$ alors $(\frac{1}{u_n})_n$ tend vers 0.*

Théorème 7 (Composition par une fonction continue)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_n$ une suites d'éléments de I. Si $(u_n)_n$ converge vers $l \in \overline{I}$ et que f admet une limite en l alors $f(u_n) \to \lim\limits_{x\to l} f$.

III.2 Convergence monotone

Théorème 8
Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Théorème 9
Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

III.3 Suites adjacentes

Définition 2
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim u_n - v_n = 0$.

Théorème 10
Deux suites adjacentes sont convergentes de même limite finie.

Théorème 11 (Théorème des segments emboîtés)
Soit $[a_n, b_n]$ une suite décroissante de segments (c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$) de $\mathbb{R}$ telle que $\lim b_n - a_n = 0$. Alors l'intersection $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton, qui est la limite commune des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

III.4 Résumé des outils

III.5 Croissances comparées

Proposition 8
Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives.

1. *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l < 1$ alors $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$. On a même $u_n = o_{+\infty}(b^n)$ pour un $b \in]0, 1[$*
2. *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l > 1$ alors $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$. On a même $b^n = o_{+\infty}(u_n)$ pour un $b > 1$.*

IV Suites complexes

IV.1 Généralités

Définition 3
Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout n entier on a $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont les parties réelles et imaginaires de la suite $(z_n)_n$.

Définition 4
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe.

1. *On dit que cette suite est bornée ssi* $\exists M \in \mathbb{R}_+ \; |z_n| \leqslant M$.
   On ne peut pas dire d'une suite complexe qu'elle est majorée ou minorée vu qu'on ne peut pas dire de deux complexes s'il y en a un plus petit que l'autre.
2. $(z_n)_n$ *est dite stationnaire si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et* $a \in \mathbb{C}$ *tels que* $\forall n \geqslant N \; z_n = a$.
3. *Une suite* $(w_n)_n$ *est dite extraite de* $(z_n)_n$ *s'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N} \; w_n = z_{\varphi(n)}$.

IV.2 Limites

Définition 5

Soit $(z_n)_n$ *une suite complexe et* $l \in \mathbb{C}$. *On dit que la suite* $(z_n)_n$ *converge vers* $l \in \mathbb{C}$ ($\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = l$) *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \; |z_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

On ne peut pas définir la notion de limite infinie pour une suite complexe.

Théorème 12

Soit $(z_n) = (x_n) + i(y_n)$ *une suite complexe.* (z_n) *converge vers une limite* $l = x + iy$ *(unique) ssi* $x_n \to x$ *et* $y_n \to y$.

Si (z_n) *converge alors elle est bornée. La réciproque étant évidemment fausse.*

Proposition 9

Les résultats sur la somme, le produit et l'inverse de limites finies (et non nulle pour l'inverse) s'étendent immédiatement aux suites à valeurs complexes.