

## Produit scalaire et matrices orthogonales

### Exercice 1

Soit  $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$  un plan de l'espace et  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ . Donner les coordonnées du

projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur  $\mathcal{P}$  ainsi que celles de son symétrique orthogonal par rapport à  $\mathcal{P}$ .

### Exercice 2

Dans  $\mathbb{R}^3$  munit du produit scalaire canonique, on considère le plan  $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ .

1. Construire  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $(u, v)$  soit une base orthonormée de  $\mathcal{P}$ .
2. On considère  $p$  et  $s$ , le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{P}$  et la réflexion de plan  $\mathcal{P}$  respectivement. Donner la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $p$  et  $s$ .
3. En déduire une expression sous forme de produit matriciel des matrices canoniquement associées à  $s$  et  $p$ .

### Exercice 3

Soient  $U$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  et  $A = I_n - 2U^tU$ .

Montrer que  $A$  est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

### Exercice 4

Soit  $\vec{p}$  un vecteur unitaire de  $E = \mathbb{R}^3$ . Soit

$$f : E \rightarrow E, \vec{u} \mapsto \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u}).$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
3. Déterminer les éléments propres de  $f$ .
4. Interpréter géométriquement  $f$ .

### Exercice 5

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}^*$ , des réels strictement positifs de somme 1. Montrer qu'alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

### Exercice 6

Soit  $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice orthogonale. Montrer que  $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$ .

(on pourra écrire  $a_{ij}$  comme produit scalaire)

### Exercice 7

Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire canonique, on considère

$$v = (0, 3, 1, -1) \text{ et } w = (1, 2, -1, 1). \text{ Soit } F = \text{Vect}(v, w)$$

Déterminer une base orthonormale de  $F^\perp$  puis une base orthonormale adaptée à  $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 8

Soit  $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale  $O$  et une unique matrice triangulaire supérieure  $T$  dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que :  $M = OT$

## Matrices symétriques

### Exercice 9

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $B = A^tA - {}^tAA$  ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que  $B = 0$ .

### Exercice 10

Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $B = A^3$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $A = P(B)$ .

### Exercice 11

Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  ${}^tAA$  est diagonalisable.  
On suppose pour le reste de l'exercice que  $A$  est inversible telle que

$${}^tA = A^{-1} + I_n.$$

2. En déduire que  $A$  est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de  $A$ , c'est-à-dire un polynôme  $P$  tel que  $P(A) = 0$ .
4. On suppose que  $A$  n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de  $A$ .

## Coniques

### Exercice 12

Tracer dans le repère canonique les coniques :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 \pm 21 = 0$$

$$9x^3 + 4xy + 6y^2 + \alpha = 0$$

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$

avec  $\alpha = -20, 0, 20$ .