Table des matières

I Equations scalaires

I.1 Rappels de 1ère année

I.2 Ordre 2, coefficients non constants

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $v_0, v_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v_0' \end{cases}$ possède une unique solution $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ définie sur I.

Théorème 2
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de (E_H) $y''(t)+a(t)y'(t)+b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques) où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et **non proportionnelles** et toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

II Systèmes différentiels linéaires

II.1 Cauchy-Lipschitz

Définition 1
Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$. Il est défini sur $\mathbb{R}$ a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système $\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$

Théorème 3
Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, I est un intervalle infini et $t_0 \in I$.

Théorème 4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (H) le système différentiel $Y' = AY$. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n.

Si $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des solution de $Y' = AY + B$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_H$, c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

II.2 Cas A diagonalisable

Proposition 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans $\mathbb{K}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $V_1, \ldots, V_n$ des vecteurs propres associés, qui forment une base de $\mathbb{K}^n$.

Alors l'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \ldots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$.

II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant