

Équations d'ordre 1

Définition 1

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \quad (E)$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I . L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad (E_H)$$

On appelle solution de (E) toute **fonction** dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de (E) vérifiant en plus une condition (appelée condition initiale) du type $y(t_0) = \alpha$ (où $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) est appelé un problème de Cauchy

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ une fonction continue sur l'intervalle I et A une **primitive** de a sur I .

Les solutions de $(E_H) \forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont exactement les fonctions y de la forme $\forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Théorème 2 (Cauchy)

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Étant donné $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(t_0) = \alpha$.

Proposition 1 (Structure de l'ensemble des solutions)

On considère l'équation différentielle (E) . Notons A une primitive de a sur l'intervalle I et $y_0 : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto e^{-A(t)} \end{cases}$ une solution de l'équation homogène associée. Alors l'ensemble des solutions de (E) est la droite affine $y_p + \text{Vect}(y_0)$ où y_p est l'une des solutions de E (appelée solution particulière).

C'est à dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_H est une solution quelconque de (E_H) .

Equation d'ordre 2

Définition 2

On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R} : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)

On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans \mathbb{C} , alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases}$$

Théorème 4 (Résolution de l'équation homogène, cas réels)

On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans \mathbb{R} , alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{\alpha t} (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Théorème 5

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. Soient $t_0 \in I$ et $v_0, v'_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy (sur I)

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = d \\ y(t_0) & = v_0 \\ y'(t_0) & = v'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2. L'équation différentielle linéaire

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

admet au moins une solution y_p sur I , et l'ensemble de ses solutions est le plan affine $y_p + \mathcal{S}_0$ où \mathcal{S}_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Proposition 2 (Principe de superposition)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.