Devoir maison n°14

A rendre le 08/02

Exercice 1

1. On considère $E = \mathbb{R}^2$ ainsi que la droite $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$
   (a) Vérifier que $\|u\| = 1$
   (b) On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$.
   Pour $X_0 \in \mathbb{R}^2$, montrer que $p(X_0) = \langle X_0, u \rangle u$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$
   (d) Vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s) \in O_2(\mathbb{R})$ et que son déterminant vaut -1.
2. On se place dans le cas général où $E = \mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Soit F un sous espace de E de dimension $r \in [\![1, n-1]\!]$ et p le projecteur orthogonal sur F.
   Montrer qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour p.
   (b) Rappeler la forme d'une matrice diagonale pour p et montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p)$ est symétrique.
   (c) On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s) \in S_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ (cette matrice est à la fois symétrique et orthogonale).
3. Réciproquement, on suppose que s est une symétrie de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s) \in S_n(\mathbb{R}) \cap O_n(\mathbb{R})$ et on note p la projection associée.
   (a) Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p) \in S_n(\mathbb{R})$.
   (b) On note $F = \ker(s - Id)$. Interpréter géométriquement F par rapport à s.
   (c) Montrer que s est une symétrie orthogonale, c'est à dire que $\ker(s + Id) = \ker(s - Id)^{\perp}$.
   (d) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

1. (a)
   (b) Utiliser la méthode générale sur les projecteurs : deux conditions géométriques à traduire.
   (c) Il s'agit de la matrice M telle que $p(X_0) = MX_0$. C'est un bon moment pour aller réviser pourquoi, dans le chapitre sur les matrices.
   (d) Vérification sur la famille des colonnes.
2. (a) On pourra utiliser Gram-Schmidt (de manière théorique) dans les espaces propres.
   (b) Utiliser la question précédente
   (c) Pour le côté orthogonal, on utiliser la définition.
3. (a) Exprimer p en fonction de s pour pouvoir utiliser l'hypothèse.
   (b) Cours
   (c) Simple application du cours. Reste à trouver quel point.
   (d) Il s'agit de montrer $F \perp G$ avec les notations du cours. Facile à ce point de l'exo.