Limite des suites

Antoine Louatron

Table des matières

I Limite d'une suite

I.1 Convergence d'une suite

Explication dessin dans le cas fini et infini.

I.1.1 Exemples

1. $\frac{1}{n+1} \to 0$
2. $an + b \to \pm\infty$ ou b.
3. $ba^n \to 0$ ou $\pm\infty$ ou rien

I.1.2 Définition
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.

1. *On dit que la suite u tend vers l ou converge vers l si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$.*
2. *On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ u_n \geqslant A$.*
3. *On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si $\forall B \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N \ u_n \leqslant B$.*

Si la suite u n'admet pas de limite, on dit qu'elle diverge. Dans le cas où u tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ ou $u_n \to l$.

On emploie aussi le mot "diverge" pour qualifier les suites de limite infinie.

I.1.3 Reformulation

Pour mieux comprendre ces limites il faut penser à ε comme étant arbitrairement petit (proche de 0), A comme arbitrairement grand positif et B comme arbitrairement grand (en valeur absolue) et négatif.

De plus, $|u_n - l| \leqslant \varepsilon \iff u_n \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$, c'est à dire que le terme u_n est dans un intervalle de longueur 2ε centré en l, et donc est très proche de l si ε est très petit.

Question Que se passe-t-il si on admet $\varepsilon = 0$ dans la définition ? Réponse : la suite est stationnaire !

I.1.4 Remarque

1. D'après la définition même de convergence il suffit de considérer la suite u "à partir d'un certain rang".
2. Si $u_n \to \pm\infty$ alors $(u_n)_n$ n'est pas bornée car les définitions impliquent que $(u_n)_n$ n'est pas majorée ou pas minorée.

I.1.5 Théorème
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. *Si $(u_n)_n$ admet une limite finie alors elle est bornée.*
2. *Si $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ alors elle est minorée (et possède même un minimum) et non majorée.*
3. *Si $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ alors elle est majorée (possède même un maximum) et non minorée.*

Preuve.
Soit u tendant vers l. On pose $\varepsilon = 1$ et $N \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\forall n \geqslant N \ |u_n - l| \leqslant 1$. Alors par inégalité triangulaire, pour ces rangs on a $|u_n| \leqslant 1 + |l|$. Ainsi $(|u_n|)_n$ est bornée par $\max\{|u_1|, \ldots, |u_N|, |l| + 1\}$.

Pour les deux autres points la définition même montre les propriétés énoncées. ∎

I.1.6 Attention

La réciproque du premier point est bien évidemment fausse : considérer $((-1)^n)_n$.

I.1.7 Lemme
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(\forall \varepsilon > 0 |x - y| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = y.$$

Preuve.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons $\forall \varepsilon > 0 |x - y| \leqslant \varepsilon$. On va montrer par l'absurde que $x = y$.

Supposons $x \neq y$. Alors, par exemple, $x > y$ et en posant $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ on obtient $x - y \leqslant \frac{x-y}{2}$ ce qui est absurde. ∎

I.1.8 Théorème (Unicité de la limite)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u possède une limite alors sa limite est unique.

Preuve.
Une suite ne peut en même temps converger vers un réel et tendre vers $\pm\infty$ car une suite qui tend vers $\pm\infty$ n'est pas bornée.

Soit maintenant l, l' deux limites de u. Montrons que $l = l'$. Soit $\varepsilon > 0$ et N_1, N_2 tels que

$$\forall n \geqslant N_1 |u_n - l| \leqslant \varepsilon \text{ et } \forall n \geqslant N_2 |u_n - l'| \leqslant \varepsilon.$$

Si maintenant $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ alors

$$|l - l'| \leqslant |u_n - l' - u_n + l| \leqslant 2\varepsilon.$$

D'après le lemme précédent $l = l'$. ∎

I.1.9 Notation

On parlera maintenant de LA limite d'une suite, quand celle-ci existe. on commencera toujours par prouver l'existence avant d'utiliser le symboles :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

I.1.10 Exemple
1. $(\frac{1}{n+1})_n$ tend vers 0. C'est immédiat en se souvenant que $\mathbb{R}$ est archimédien.
2. Soit $\alpha > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{c}{n^\alpha})_{n \geqslant 1}$ tend vers 0.
3. Soit $a \in]-1, 1[$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors $(ca^n)_n$ tend vers 0.

I.2 Caractérisations de la convergence

I.2.1 Proposition
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$
1. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - l = 0$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - l| = 0$

Preuve.
Ecrire les définitions de ces faits... ∎

I.2.2 Exercice
Montrer que $\lim \frac{\cos n!}{n+1} = 0$, $\lim \frac{2n+1}{n-1} = 2$

I.2.3 Proposition
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
1. *La suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ ssi $(-u_n)_n$ tend vers $-\infty$.*
2. *Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$ (ou si (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang) alors on a équivalence* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
3. *Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n < 0$ (ou si (u_n) est strictement négative à partir d'un certain rang) alors on a équivalence* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Preuve.

1. Il suffit de reprendre la définition et de remarquer $u_n \leqslant A \iff -u_n \geqslant -A$.
2. Supposons pour commencer que $u_n \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$. Alors elle est forcément strictement positive à partir d'un certain rang. Soit de plus $\varepsilon > 0$.

   On doit trouver un rang à partir duquel $\left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon$ ou encore $|u_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0\ u_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ (on a appliqué la définition). Alors pour ces n, $u_n > 0$ donc $u_n = |u_n|$ vérifie $\frac{1}{|u_n|} < \varepsilon$ et on a bien trouvé un rang à partir duquel u_n est proche de 0 à ε près.
   Supposons maintenant $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ et $u_n > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $0\frac{1}{u_n} < \varepsilon$. Alors pour ces même rangs $0 < \frac{1}{\varepsilon} < u_n$ c'est à dire $u_n > A$. Pour toute quantité réelle fixé, on a trouvé un rang à partir duquel u_n est plus grand que cette quantité.
3. Preuve similaire. ∎

I.2.4 Remarque

Il est important que le signe de (u_n) soit constant, au moins à partir d'un certain rang. En effet la suite $(\frac{(-1)^n}{n})_n$ converge vers 0 mais son inverse ne tend pas vers $\pm\infty$.

I.2.5 Exemple

1. Soit $\alpha > 0$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$, la suite $(Cn^\alpha)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.
2. Soit $a > 1$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $(Ca^n)_n$ tend vers $+\infty$.

I.3 Suites extraites

I.3.1 Définition
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ est une suite de la forme $\forall n \in \mathbb{N} v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

I.3.2 Exemple
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Les suites $(u_{n+1}), (u_{n+12}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{2^n})$ son toutes des suites extraites de (u_n).

I.3.3 Lemme
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geqslant n$.

Preuve.
On a évidemment $\varphi(0) \geqslant 0$ car $\varphi(0) \in \mathbb{N}$.
Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$ FIXE que $\varphi(n) \geqslant n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.
Or $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) > n$. Or $\varphi(n+1)$ est un entier, donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$.
Finalement, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n) \geqslant n$. ∎

I.3.4 Théorème
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ une suite qui admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite de (u_n) tend vers l.

Preuve.
Notons $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ une suite extraite. Fixons une réel (A ou $\varepsilon > 0$). A partir d'un rang n_0, u_n est proche de l à la précision souhaitée ($|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ ou $u_n \geqslant A$ ou $u_n \leqslant A$). Comme $v_n = u_{\varphi(n)}$ est un terme de u d'indice supérieur à n, v_n est également proche de l à la précision souhaitée (TOUS les termes de u d'indice $\geqslant n_0$ le sont).
Finalement $v_n \to l$. ∎

I.3.5 Théorème
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $l \in \overline{R}$.
$(u_n)_n$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ tendent vers l.

Preuve.

— On suppose pour commencer que $u_n \to l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0\ |u_n - l| < \varepsilon$. Alors on a aussi pour tout $n \geqslant n_0\ |u_{2n} - l| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$.
On a bien trouvé des rangs à partir desquels ces suites sont proches de l à ε près.
Le même raisonnement montre que si $u_n \to \pm\infty$ alors u_{2n} et u_{2n+1} aussi.

— Réciproquement, supposons que $(u_{2n})_n$ admet une limite l égale à celle de (u_{2n+1}).
On traite le cas $l \in \mathbb{R}$ pour commencer. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant n_1 |u_{2n} - l| < \varepsilon \text{ et } \forall n \geqslant n_2\ |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$$

Mais si maintenant on prend $n \geqslant \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, il y a deux cas :

1. n est pair et s'écrit $n = 2k$. Alors $k \geqslant n_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2k} - l| < \varepsilon$.
2. n est impair et s'écrit $n = 2k + 1$. Alors $k \geqslant n_2$ et donc $|u_n - l| = |u_{2k+1} - l| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, u_n est proche de l à ε près. Et finalement la suite (u_n) tend vers l.
Pour le cas des limites $\pm\infty$, on procède exactement de même. ∎

I.3.6 Méthode

1. Pour montrer qu'une suite converge, on pourra montrer que la suite des termes pairs convergent, puis que la suite des termes impairs converge vers la même limite.
2. Pour montrer qu'une suite ne converge pas, on pourra trouver une suite extraite qui ne converge pas ou trouver deux suites extraites qui convergent vers deux limites distinctes.

I.3.7 Exemple
$((-1)^n)_n$ et $((-1)^n n)_n$ n'ont pas de limite dans $\overline{R}$.

II Limites et inégalités

II.1 Utilisation des suites qui possèdent une limite

II.1.1 Proposition
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers l et $l' \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $l < l'$ alors il existe un rang à partir duquel $u_n < v_n$.

Preuve.
Considérons la suite $(u_n - v_n)_n$. ON va prouver qu'elle est strictement positive à partir d'un certain rang. On traite le cas où les deux limites sont finies.

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors un rang n_0 et un rang n_1 tels que $\forall n \geqslant n_0 |u_n - l| < \varepsilon$ et $\forall n \geqslant n_1\ |v_n - l'| < \varepsilon$.

Soit $n \geqslant \max(n_0, n_1)$. Alors $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$ et donc $-l - \varepsilon < -u_n < -l + \varepsilon$. On somme avec le même encadrement pour v_n.

$$l' - l - 2\varepsilon < v_n - u_n$$

Comme $l' - l > 0$, on peut poser $\varepsilon = \frac{l'-l}{2} > 0$ et appliquer le raisonnement précédent. On obtient $l' - l - (l' - l) < v_n - u_n$ c'est à dire $0 < v_n - u_n$.

A partir du rang $\max(n_0, n_1)$, la suite $(v_n - u_n)$ est strictement positive. ∎

II.1.2 Exemple
Si $(v_n)_n$ est la suite nulle, la proposition précédente nous dit qu'un suite de limite $l < 0$ est strictement négative à partir d'un certain rang. De même pour une suite strictement positive en prenant $u_n = 0$.

II.1.3 Théorème (Passage à la limite des inégalités LARGES)
Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Soient en outre m, M des réels, $N \in \mathbb{N}$. Soient $l, l' \in \mathbb{R}$

1. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\lim_{+\infty} v_n = l'$ et si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \leqslant l'$.*
2. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\forall n \geqslant N\ u_n \leqslant M$ alors $l \leqslant M$.*
3. *Si $\lim_{+\infty} u_n = l$ et $\forall n \geqslant N\ u_n \geqslant m$ alors $l \geqslant M$.*

Preuve.
Seul le premier point est à prouver, les deux autres en étant des cas particuliers.

On suppose donc que les deux suites convergent vers l, l'. On suppose en outre que $\forall n \geqslant n_0\ u_n \leqslant v_n$.

Si on avait $l > l'$ alors d'après la proposition II.1.1 on aurait $u_n > v_n$ à partir d'un rang n_1. Si maintenant on prend $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ alors on a $u_n \leqslant v_n$ et $u_n > v_n$. Contradiction. Donc $l \leqslant l'$. ∎

II.1.4 M-Remarque

1. On doit D'ABORD prouver la convergence des deux suites avant de passer à la limite. Ce théorème n'est pas un théorème d'existence.
2. Dans le cas général, le passage à la limite d'une inégalité stricte la rend large. Par exemple $\forall n \geqslant 1\ \frac{1}{n} > 0$, mais $\frac{1}{n} \to 0 \not> 0$.

II.2 Comparaison

II.2.1 Proposition
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose de plus que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

1. *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2. *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*

Preuve.
Trivial ! les même rang conviennent pour A fixé. ∎

II.2.2 Méthode

Pour prouver qu'une suite tend vers $+\infty$, on la minore par une suite dont on sait qu'elle tend vers $+\infty$. Pour prouver qu'une suite tend vers $-\infty$, on la majore par une suite dont on sait qu'elle tend vers $-\infty$.

II.2.3 Exercice
Montrer que la suite $(\frac{n^2+1}{n+1})_n$ tend vers $+\infty$ et que $(n!)_n$ aussi.

II.2.4 Exemple
Montrons que $\lim \frac{n^3+3n+1}{n+1} = +\infty$. En effet pour tout $n \geqslant 1\ \frac{n^3+3n+1}{n+1} \geqslant \frac{n^2+2n+1}{n+1} = n+1 \to \infty$.

II.2.5 Exemple (Série harmonique)
On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On s'intéresse à la fonction inverse sur R_+^* et plus particulièrement à $\int\limits_k^{k+1} \frac{}{t}$ pour un $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ Dessin.

On a alors $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En particulier $H_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{}{t}$

Or cette somme d'intégrale n'est autre que $\int_1^{n+1} \frac{}{t} = \ln(n+1)$. Donc $H_n \to \infty$!.

II.2.6 Suites dont le TG est une somme

Pour encadrer certaines sommes on encadre chaque terme et on somme les encadrement.

Si $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et qu'on a $\forall k \in [\![0, n]\!]\ \alpha_k \leqslant u_k \leqslant \beta_k$ alors $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \beta_k$.

Si on est suffisamment malin pour choisir les α_k et β_k tels qu'on sache calculer les sommes, alors on pourra peut-être aboutir.

II.2.7 Théorème (Théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ trois suites réelles telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si de plus les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(v_n)_n$ admet une limite et cette limite est l.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit de plus $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N \ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

. Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1 \ |u_n - l| \leqslant \varepsilon$ et $\forall n \geqslant N_2 \ |w_n - l|\varepsilon$. On a alors pour tout $n \geqslant N, N_1, N_2$

$$-\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l \leqslant \varepsilon.$$

soit donc $|v_n - l| \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut. ∎

II.2.8 Exemple
Montrons de deux manières différentes que $\frac{\sin n}{n+1} \to 0$.

II.2.9 Remarque

Si on a $|u_n| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$. il faut se souvenir qu'une inégalité faisant intervenir une valeur absolue est en fait un encadrement.

III Existence de limites

III.1 Opérations

III.1.1 Proposition (Somme de suites)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, $l, l' \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	??	$-\infty$

Preuve.

— Deux limites finies.
Soit $\varepsilon > 0$ et N_1, N_2 tels que

$$\forall n \geqslant N_1 \ |u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall n \geqslant N_2 \ |v_n - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a par inégalité triangulaire

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leqslant |u_n - l| + |v_n - l'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi $u_n + v_n \to l + l'$.

— Cas une limite infinie et une limite finie. Par exemple $v_n \to +\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$ et M une borne de $(u_n)_n$ qui est bornée car convergente (ie. on a $\forall n \in \mathbb{N} \ |u_n| \leqslant M$). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n + u_n \geqslant v_n - M$$

Soit N un entier tel que $\forall n \geqslant N \ v_n \geqslant A + M$. A partir de ce rang $(u_n + v_n)_n$ est supérieure à A d'après l'inégalité précédente et donc $u_n + v_n \to +\infty$.

— Deux limites $+\infty$.
Soit $A > 0$. Soient N_1, N_2 tels que $\forall n \geqslant N_1 \ u_n \geqslant A$ et $\forall n \geqslant N_2 \ v_n \geqslant A$. Alors comme d'habitude pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a

$$u_n + v_n \geqslant 2A \geqslant A$$

et donc $(u_n + v_n)_n$ tend vers $+\infty$. ∎

III.1.2 Forme indéterminée

Le cas où les deux limites sont infinies opposées est indéterminé, c'est à dire qu'il peut se passer "n'importe quoi"

1. $u_n = n$, $v_n = -n^2 + n - 1$, alors $u_n + v_n \to -\infty$.
2. $u_n = n$, $v_n = -n + 1$, alors $u_n + v_n \to 1$.
3. $u_n = n^2$, $v_n = -n$, alors $u_n + v_n \to +\infty$.

III.1.3 Théorème
Soit $(u_n)_n$ une suite tendant vers 0 et $(v_n)_n$ une suite bornée. Alors $(u_n v_n)_n$ converge vers 0.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$ et soit $M > 0$ une borne pour $(v_n)_n$ c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n| \leqslant M$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1}$. Alors pour tout $n \geqslant N$

$$|u_n v_n| \leqslant |u_n| M \leqslant \varepsilon$$

d'où le résultat annoncé. ∎

III.1.4 Proposition (produit de deux suites)
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles et $l, l' \in \mathbb{R}$. On a les résultats suivants

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l>0$	0	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$??$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Autrement dit, dès qu'on peut faire le produit dans $\overline{\mathbb{R}}$, la limite existe et vaut ce produit.

Preuve.
— Deux limites finies.
Soit $\varepsilon > 0$. On s'intéresse à la quantité, pour un entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_n v_n - ll' = v_n(u_n - l) + l(v_n - l')$$

Or, comme $(v_n)_n$ converge, elle est bornée par M. De même, la suite constante égale à l est bornée.
Donc $(v_n(u_n - l))_n$ converge vers 0 car c'est le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 et $(l(v_n - l'))_n$ converge vers 0 pour la même raison.
Ainsi $u_n v_n - ll' \to 0$ et donc $u_n v_n \to ll'$.
Ainsi $u_n v_n \to ll'$.

— Si $u_n \to l > 0$ et $v_n \to +\infty$ (les cas de signes opposés se traitent de manière tout à fait similaire.)
Soit $A \in \mathbb{R}^+$. On commence par poser $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1\ |u_n - l| \leqslant \frac{l}{2}$ de telle sorte que $\forall n \geqslant N_1\ u_n \geqslant \frac{l}{2} > 0$.
Alors il suffit de prendre $N_2 \geqslant N_1$ tel que $\forall n \geqslant N_2 v_n \geqslant \frac{2A}{l}$ et après ce rang on a

$$\forall n \geqslant N_2\ u_n v_n \geqslant A.$$

Donc $(u_n v_n)_n$ tend vers $+\infty$.

— Deux limites $+\infty$.
Soit $A \geqslant 1$. Alors pour tous les n tels que $u_n \geqslant A$ et $v_n \geqslant A$ (même technique que d'habitude) on a $u_n v_n \geqslant A^2 \geqslant A$. Donc $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$. ∎

On a prouvé en passant

III.1.5 Corollaire (multiplication par un scalaire)
Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n$	λl	$+\infty$ *si* $\lambda > 0$ 0 *si* $\lambda = 0$ $-\infty$ *si* $\lambda < 0$	$-\infty$ *si* $\lambda > 0$ 0 *si* $\lambda = 0$ $+\infty$ *si* $\lambda < 0$

III.1.6 Proposition (Inverse)
Soit $(u_n)_n$ *une suite réelle.*

1. *Si* $(u_n)_n$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}^*$ *alors* $(\frac{1}{u_n})_n$ *converge vers* $\frac{1}{l}$.
2. *Si* $(u_n)_n$ *converge vers* 0 *et est de signe constant à partir d'un certain rang alors* $(\frac{1}{u_n})_n$ *tend vers* $\pm\infty$ *(même signe que* u_n*)*
3. *Si* $(u_n)_n$ *tend vers* $\pm\infty$ *alors* $(\frac{1}{u_n})_n$ *tend vers 0.*

Preuve.
On a déjà prouvé les deux derniers points. Il reste le premier.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N_1 un rang à partir duquel u_n est de signe constant et $|u_n| \geqslant \frac{|l|}{2}$. On remarque que $(\frac{1}{u_n})$ est définie à partir de ce rang au moins. Alors pour les $n \geqslant N_1$

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{u_n - l}{lu_n}\right| \leqslant \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{2|u_n - l|}{|l|^2}.$$

Si maintenant on prend $N_2 \geqslant N_1$ tel que $\forall n \geqslant N_2\ |u_n - l| \frac{2\varepsilon}{|l|^2}$ alors pour $n \leqslant N_2$

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ce qui prouve que $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$ ∎

III.1.7 Exercice
Dresser le tableau pour le quotient

III.1.8 Théorème (Composition par une fonction continue)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $(u_n)_n$ *une suites d'éléments de* I. *Si* $(u_n)_n$ *converge vers* $l \in \overline{I}$ *et que* f *admet une limite en* l *alors* $f(u_n) \to \lim\limits_{x\to l} f$.

Preuve.
Provisoirement admis. ∎

III.1.9 Remarque

En particulier si f est continue en l alors $f(u_n) \to f(l)$. Par exemple $e^{\frac{1}{n}} \to 1$ car $\exp$ est continue en 0.

III.1.10 Exemple
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$

Trouver la seule limite réelle possible d'une suite qui vérifie $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

III.2 Convergence monotone

III.2.1 Théorème
Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Preuve.
On va montrer que toute suite croissante et majorée converge. Le raisonnement est similaire pour l'autre proposition (et le faire est un bon exercice pour réviser son cours...).

Soit $(u_n)_n$ une suite croissante et majorée. Alors l'ensemble $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et admet donc une borne supérieure que l'on note l.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors d'après la caractérisation de la borne sup, il existe un élément de A, u_N, tel que $u_N > l - \varepsilon$.

Mais comme (u_n) est croissante on a $\forall n \geqslant N\ u_n \geqslant u_N > l - \varepsilon$. Or $l = \sup A$ donc pour tous ces n on a $u_n \leqslant l$
Ainsi $\forall n \geqslant N\ l - \varepsilon < u_n \leqslant l \leqslant l + \varepsilon$ et donc $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$. ∎

III.2.2 Théorème
Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Preuve.
On prouve la seconde.

Soit $A \in \mathbb{R}^-$. Comme A ne minore pas $(u_n)_n$ il existe un N tel que $u_N < A$. Mais (u_n) est décroissante, donc $\forall n \geqslant N\ u_n \leqslant u_N \leqslant A$. Ainsi $u_n \to -\infty$. ∎

III.2.3 Exercice
Faire l'autre.

III.2.4 Remarque

On peut résumer les résultats précédents par : toute suite monotone admet une limite dans $\overline{R}$. (théorème de convergence monotone)

III.2.5 Exemple
1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$ converge.
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

III.3 Suites adjacentes

III.3.1 Définition
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim u_n - v_n = 0$.

III.3.2 M-Remarque

On ne suppose pas du tout que les suites u, v convergent.

III.3.3 Théorème
Deux suites adjacentes sont convergentes de même limite finie.

Preuve.
On suppose que $(u_n)_n$ est une suite croissante et $(v_n)_n$ est décroissante.

— Montrons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n$. On sait que $(u_n - v_n)_n$ est croissante. Si pour un rang on avait $u_N > v_N$ alors à partir de ce rang $u_n - v_n \geqslant u_N - v_N > 0$ et donc la limite de $(u_n - v_n)$ serait $\geqslant u_N - v_N > 0$ ce qui n'est pas. (par passage à la limite des inégalités.)

— Comme (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ donc (v_n) est minorée et (u_n) majorée.

— Il reste à voir que $(u_n)_n$ est croissante majorée donc converge vers $l_u \in \mathbb{R}$, (v_n) est décroissante minorée donc converge vers $l_v \in \mathbb{R}$ et que $l_u - l_v = \lim u_n - v_n = 0$. ∎

III.3.4 Remarque

1. Pour montrer que $u_n - v_n \to 0$ on évitera de supposer que les suites sont convergentes et de faire la différence de leur limite...
2. Si (u_n) est la suite croissante et (v_n) la suite décroissante, alors d'après la preuve précédente on a $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant l \leqslant v_n$ en notant l la limite commune.

III.3.5 Exemple
Les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$ sont adjacentes.
Leur limite commune est e (ce que l'on a pas montré !)

III.3.6 Exemple
Les suites des approximations rationnelles par excès et par défaut sont adjacentes.

III.4 Résumé des outils

III.4.1 Méthode

Pour prouver la convergence d'une suite on peut

1. Utiliser les résultats d'opérations sur les limites de suites convergentes, ainsi que d'éventuelles manipulation algébriques.
2. Utiliser le théorème d'encadrement, le théorème de convergence monotone, ou le théorème des suites adjacentes.
3. Intuiter la limite l de la suite et majorer $|u_n - l|$ par une suite dont on sait qu'elle tend vers 0.
4. Intuiter la limite l et revenir à la définition.

III.4.2 Méthode

Pour prouver la divergence d'une suite

1. Trouver **deux** suites extraites de limite différentes.
2. Trouver une suite extraite dont on sait qu'elle ne converge pas.
3. Procéder par l'absurde en considérant sa limite l puis trouver une contradiction (sur l par exemple).

III.5 Croissances comparées

III.5.1 Rappels

Soient $\alpha, \beta > 0$.

1. $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} = 0$
2. $\lim\limits_{+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0$ si $a > 1$.

III.5.2 Proposition
Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives.

1. *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l < 1$ alors $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$. On a même $u_n = o_{+\infty}(b^n)$ pour un $b \in]0,1[$*
2. *Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l > 1$ alors $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$. On a même $b^n = o_{+\infty}(u_n)$ pour un $b > 1$.*

Preuve.
Supposons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l < 1$. On pose $a = \frac{1+l}{2}$ le milieu de l et 1. Alors $l < a$ (faire un dessin) et donc APCR n_0, d'après la proposition II.1.1, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < a$.

De plus, pour $n > n_0$ on a
$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0}$$
par produit télescopique. Tous les quotients qui apparaissent ici sont $< a$ et donc $u_n < a^{n-n_0} u_{n_0}$. On pose (v_n) la suite géométrique de raison a et de premier terme $\frac{u_{n_0}}{a^{n_0}}$. Alors $-1 < a < 1$ donc $v_n \underset{+\infty}{\to} 0$. De plus $0 < u_n < v_n$ APCR. Ainsi, par encadrement $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$. Ainsi $u_n = o_{+\infty}(b^n)$ si $b = \frac{1+a}{2}$.

Si maintenant on suppose plutôt $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1$ alors $\frac{u_n}{u_{n+1}} \to \frac{1}{l} < 1$ et donc la suite $(\frac{1}{u_n})$ tend vers 0 et est strictement positive. Finalement, $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ ■

III.5.3 Application à la factorielle

1. On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$ pour un $a > 1$. Calculons la limite de (u_n) si possible. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}$$

   Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} 0 < 1$ et d'après la proposition précédente, $u_n \to 0$.

2. Cette fois, $v_n = \frac{n^n}{n!}$ avec la convention $0^0 = 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{\frac{\ln(1+n^{-1})}{n^{-1}}}\end{aligned}$$

   Or $n^{-1} \underset{+\infty}{\to} 0$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ donc par compositions $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{\to} e$.

III.5.4 Conclusion

On peut noter de manière schématique, pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$

$$\ln(n)^\alpha << n^\beta << a^n << n! << n^n$$

IV Suites complexes

IV.1 Généralités

IV.1.1 Définition
Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout n entier on a $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont les parties réelles et imaginaires de la suite $(z_n)_n$.

IV.1.2 Définition
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe.

1. *On dit que cette suite est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}_+\ |z_n| \leqslant M$.*
   On ne peut pas dire d'une suite complexe qu'elle est majorée ou minorée vu qu'on ne peut pas dire de deux complexes s'il y en a un plus petit que l'autre.
2. *$(z_n)_n$ est dite stationnaire si il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \geqslant N\ z_n = a$.*
3. *Une suite $(w_n)_n$ est dite extraite de $(z_n)_n$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ w_n = z_{\varphi(n)}$.*

IV.1.3 M-Remarque

On ne peut pas non plus parler de monotonie d'une suite complexe...

IV.2 Limites

IV.2.1 Définition
Soit $(z_n)_n$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. On dit que la suite $(z_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ($\lim_{n\to+\infty} z_n = l$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N\ |z_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

On ne peut pas définir la notion de limite infinie pour une suite complexe.

IV.2.2 Théorème
Soit $(z_n) = (x_n) + i(y_n)$ une suite complexe. (z_n) converge vers une limite $l = x + iy$ (unique) ssi $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
Si (z_n) converge alors elle est bornée. La réciproque étant évidemment fausse.

IV.2.3 Remarque

Comme pour les fonctions, on se ramène à l'étude de deux suites réelles pour étudier une suite complexe.

IV.2.4 Proposition
Les résultats sur la somme, le produit et l'inverse de limites finies (et non nulle pour l'inverse) s'étendent immédiatement aux suites à valeurs complexes.