Concours blanc : Math C

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Dans cette exercice on identifie les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales. La partie II est indépendante des autres. On pourra utiliser librement les résultats de la partie I pour traiter la partie III.

Partie I : polynômes de Bernoulli

Dans cette première partie on étudie une suite de polynômes très utiles, ainsi que certaines de leurs propriétés.

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$.

   (a) On pose $G : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

   Préciser le lien entre f et G.

   Correction D'après le théorème fondamental de l'analyse, G est la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

   (b) Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t = 0$. On exprimera F en fonction de G.

   Correction On veut montrer qu'il existe une unique primitive F de f sur $[0,1]$ telle que $\int\limits_0^1 F = 0$.

   Soit $F = G + c$ où $c \in \mathbb{R}$ une primitive quelconque de f. Alors $\displaystyle\int_0^1 F = \int\limits_0^1 G + c$ donc $\displaystyle\int_0^1 F = 0$ ssi $c = -\displaystyle\int_0^1 G$.

   Il existe une unique valeur convenable pour c, ainsi il existe une unique primitive F convenable.

   Si on veut exprimer F, ce qui n'est pas indispensable, on obtient

   $$F : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \end{cases}$$

On pose maintenant $B_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on définit le polynôme B_n par :

$$B_n' = B_{n-1} \text{ et } \int\limits_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Cette suite de polynôme est bien définie d'après la question précédente.

2. Montrer que $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et expliciter B_2, B_3 et B_4.

   Correction $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + c_2$ où $c_2 \in \mathbb{R}$ est à trouver. Comme $\int\limits_0^1 B_2(t)\mathrm{d}t = 0$, on trouve $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = c_2 = 0$ donc $c_2 = \frac{1}{12}$. $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.
   Donc $B_3(X) = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} + c_3$ avec $\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + c_3 = 0$ donc $c_3 = 0$.
   Finalement $B_4(X) = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} + c_4$ avec $\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + c_4 = 0$ soit encore $\frac{1}{24}(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + c_4 = 0$.
   $c_4 = -\frac{1}{720}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n.

   Correction Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné que le degré de B_n est n et son coefficient dominant est $\frac{1}{n!}$. On peut remarquer que les polynômes de la question précédente vérifient tous cette propriété.
   Alors le terme dominant de B_{n+1} est $\frac{1}{n!}\frac{X^{n+1}}{n+1} = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}$ et B_{n+1} est bien de degré $n+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{(n+1)!}$.
   Finalement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$.

4. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $B_n(0) = B_n(1)$. Cette relation est-elle valable pour $n = 0$? $n = 1$?

   Correction Soit $n \geqslant 2$. Alors $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 B_{n-1}(t)\mathrm{d}t = 0$ car $n-1 > 0$.
   Cette relation est valable pour $n = 0$ mais pas pour $n = 1$.

5. On définit une autre suite de polynômes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ pour tout n. Montrer que (C_n) vérifie les conditions définissant (B_n) et en déduire que

   $$\forall n \in \mathbb{N}\ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

   Correction On a bien $C_0 = B_0 = 1$.
   Soit $n > 0$. Supposons que $B_{n-1} = C_{n-1}$
   Pour $n > 0$, $C'_n(X) = (-1)^n \times (-B'_n(1-X)) = (-1)^{n+1}B_{n-1}(1-X) = (-1)^{n-1}B_{n-1}(1-X) = C_{n-1}(X)$.
   De plus, $\int_0^1 C_n(t)\mathrm{d}t = -\int_1^0 C_n(1-u)\mathrm{d}u$ en posant $u = 1-t$ Finalement $\int_0^1 C_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^n B_n(u)\mathrm{d}u = 0$ (car $n > 0$).
   Ainsi, C_n est la seule primitive de B_{n-1} dont l'intégrale sur $[0, 1]$ est nulle et donc $C_n = B_n$.
   Finalement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$C_n = B_n$$

6. Que peut-on en déduire concernant les courbes représentatives des fonctions B_n ? On distinguera les cas suivant la parité de n.

   Correction Remarquons que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$ est la symétrie par rapport à la droite $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, dans le cas n pair, la courbe représentative de B_n est symétrique par rapport à $\mathcal{D} : y = \frac{1}{2}$.
   De plus, l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$ est la symétrie centrale de centre $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a trouvé le point fixe) et donc, dans le cas n impair, la courbe représentative de B_n est symétrique par rapport au point $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Une rédaction moins précise était tout à fait acceptable ici, en invoquant le cours de sup sur l'interprétation de la courbe de $x \mapsto f(1-x)$.

7. On suppose (dans cette question seulement) que n est impair et $n \geqslant 3$. Montrer que $B_n(0), B_n(\frac{1}{2}), B_n(1)$ sont nuls.

   Correction On a $B_n(0) = B_n(1)$ d'après la question 5. De plus, en évaluant la relation de la question 6 en 0, $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$.
   Donc $B_n(0) = B_n(1) = 0$. En évaluant en $\frac{1}{2}$, on trouve $B_n(\frac{1}{2}) = -B_n(\frac{1}{2}) = 0$.

8. Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. On pourra utiliser le théorème de Rolle.

   Correction La propriété est vraie pour $m = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que B_{2m+1} en s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$. Montrons que B_{2m+3} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   Or $B'_{2m+3} = B_{2m+2}$ qui est strictement monotone sur $]0, \frac{1}{2}[$ (par hypothèse de récurrence, sa dérivée est de signe strict constant).
   Si B_{2m+3} s'annule en un $a \in]0, \frac{1}{2}[$, alors B_{2m+3} s'annule en 0 et a donc sa dérivée s'annule sur $]0, a[$ d'après le théorème de Rolle. De même B'_{2m+3} s'annule sur $]a, \frac{1}{2}[$ car $B_{2m+3}(a) = B_{2m+3}(\frac{1}{2})$.
   Une fonction strictement monotone sur un intervalle ne peut pas s'y annuler deux fois. Contradiction et donc B_{2m+3} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
   Par récurrence, on peut conclure.

9. En déduire que B_{2m+1} ne s'annule pas sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

   Correction Imaginons que pour un $t \in]\frac{1}{2}, 1[$ on ait $B_{2m+1}(t) = 0$. Alors $B_{2m+1}(1-t) = (-1) \times 0 = 0$. or $1 - t \in]0, \frac{1}{2}[$. Contradiction.
   Ainsi, B_{2m+1} ne s'annule pas sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Partie II : fonction ζ

Le but de cette partie est définir une nouvelle fonction (au centre de nombreuses recherches en mathématiques)

1. Soit f une fonction continue et décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour un $a \in \mathbb{R}$. Soit k un entier, $k \geqslant a + 1$. Justifier que
$$\int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$$
   Un schéma sera apprécié, mais ne constitue pas une preuve.

   Correction C'est du cours. Encadrement pour $t \in [k, k+1]$ de $f(t)$ par des constante + croissance de l'intégrale.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α.

   En cas de convergence, on pose $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

   Correction On prend $a = \frac{1}{2}$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.
   On a alors pour $N \in \mathbb{N}$, $\int_2^{N+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum\limits_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_1^N f(t)\mathrm{d}t$.
   En traitant à part le cas $\alpha = 1$, on peut calculer une primitive et conclure par encadrement de la série converge ssi $\alpha > 1$. On trouve pour $\alpha > 1$, $\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha-1)} \leqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$.

3. Montrer que pour $\alpha > 1$, $1 \leqslant \zeta(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$. Qu'en déduire pour $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha)$?

   Correction 1 est le premier terme de la somme de la série donc $1 \leqslant \zeta(\alpha)$ car il s'agit d'une série à termes positifs. L'autre inégalité est une conséquence directe du calcul précédent, en ajoutant 1 pour considérer la somme à partir de 1 et non plus de 2.
   On en déduit par encadrement que
$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to+\infty}{\to} 1$$

4. En reprenant avec soin les calculs de la question 2, trouver un équivalent de $\zeta(\alpha)$ quand $\alpha \to 1$.

   Correction On trouve $\zeta(\alpha) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}$ par encadrement du quotient, et en remarquant que $2^{\alpha+1} \underset{\alpha\to-1}{\to} 1$.

Partie III : Calcul de $\zeta(2m)$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$. Montrer que
$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

   Correction Commençons par remarque que $2\pi t \in]0, 2\pi[$ et notons $S_N = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t)$.
$$\begin{aligned}
S_N = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{N} e^{2ik\pi t}\right) &= 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{N} \left(e^{2i\pi t}\right)^k\right) - 1 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(N+1)\pi t} - 1}{e^{2i\pi t}} - 1\right) - 1 \quad \text{car } e^{2i\pi t} \neq 1 \\
&= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(N+1)\pi t} \times 2i\sin((N+1)\pi t)}{e^{i\pi t} \times 2i\sin(\pi t)}\right) - 1 \quad \text{méthode de l'angle moitié} \\
&= 2\frac{\sin((N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\cos(N\pi t) - 1 \quad \text{par propriété de la partie réelle}
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b)$ et on obtient, après mise au même dénominateur

$$S_N = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2. Soit $n > 0$. On définit sur $]0,1[$ la fonction $\varphi_n : t \mapsto \frac{B_n(t)-B_n(0)}{\sin(\pi t)}$. Montrer que $\forall t \in]0,1[\ \varphi_n(t) = (-1)^n \varphi_n(1-t)$.

   Correction On a pour $t \in]0,1[$, $\varphi_n(1-t) = \frac{B_n(1-t)-B_n(0)}{\sin(\pi-\pi t)} = \frac{(-1)^n B_n(t)-B_n(0)}{\sin(\pi t)} = (-1)^n \frac{B_n(t)-(-1)^n B_n(0)}{\sin(\pi t)}$.
   Or $(-1)^n B_n(0) = B_n(1) = B_n(0)$ d'après la question $I.6$ (évalué en 1) et $I.5$.
   Ainsi $\varphi_n(1-t) = (-1)^n \varphi_n(t)$.

3. Montrer que φ_n est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

   Correction D'après la question précédente, si on prouve que φ_n est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ alors on pourra prolonger φ_n en 1 en posant $\varphi(1) = (-1)^n \varphi_n(0)$ et le prolongement sera $\mathcal{C}^1$.
   Or $B_n(t) - B_n(0) = 0 + B_n'(0)t + o_0(t)$ (B_n est $\mathcal{C}^1$, on applique Taylor-Young) et $\sin(\pi t) \underset{0}{\sim} \pi t$ et donc $\varphi(t) = \frac{1}{\pi} B_n'(0) + o_0(1)$ donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\to} \frac{B_n'(0)}{\pi}$ et est prolongeable par continuité en 0 (et donc en 1).
   Pour la classe $\mathcal{C}^1$ deux méthodes. On peut écrire φ_n comme le quotient de $t \mapsto \frac{B_n(t)-B_n(0)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(\pi t)}{t}$ qui sont DSE sur $\mathbb{R}$ en entier donc $\mathcal{C}^\infty$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1[$.
   Sinon on retrousse nos manches. Pour $t \in]0,1[$,

   $$\varphi'(t) = \frac{B_n'(t)\sin(\pi t) - (B_n(t) - B_n(0))\pi\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)^2}$$

   Or $\sin(\pi t)^2 \underset{0}{\sim} \pi^2 t^2$. De plus, $B_n'(t) = B_n'(0) + B_n''(0)t + o_0(t)$, $\sin(\pi t) = \pi t + o_0(t^2)$ donc $B_n'(t)\sin(\pi t) = B_n'(0)\pi t + B_n''(0)\pi t^2 + o_0(t^2)$
   De même, $\pi(B_n(t)-B_n(0))\cos(\pi t) = \pi(B_n'(0)t + \frac{B_n''(0)}{2}t^2 + o_0(t^2))(1+o_0(t)) = \pi B_n'(0)t + \frac{\pi B_n''(0)}{2}t^2 + o_0(t^2)$.
   Pour ces calculs on a usé du fait que $to_0(t) = o_0(t^2)$ pour réduire l'ordre des DL à considérer.
   Finalement, par somme puis quotient $\varphi'(t) = \frac{B_n''(0)}{2\pi} + o_0(1)$. Ainsi φ' possède une limite finie en 0, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1[$ donc est $\mathcal{C}^1$sur $[0,1[$ d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$. On conclut en 1 comme pour la continuité.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.
   (a) Montrer que f' est bornée sur $[0,1]$.

   Correction f' est une fonction continue sur un segment, donc elle est bornée.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left| \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \right| = 0$.

   Correction Soit $x > 0$.
   Posons $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in [0,1]$ $|f'(t)| \leqslant M$. Alors pour $t \in [0,1]$ on a $|f'(t)\cos(xt)| = |f'(t)||\cos(xt)| \leqslant M \times 1$ par produit d''inégalités entre nombres positifs.
   Alors, par inégalité triangulaire sur les intégrales puis croissance de l'intégrale, on obtient

   $$0 \leqslant \left| \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)\cos(xt)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{x}$$

   Par encadrement, on obtient bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \left| \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \right| = 0$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$. On pourra utiliser une intégration par parties.

   Correction Soit $x > 0$. f est $x \mapsto \sin(xt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et, par intégration par parties.

   $$\int_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = [f(t)\frac{-1}{x}\cos(xt)]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$$

   On a vu que l'intégrale qui apparaît tend vers 0 lorsque $x \underset{+}{\to} \infty$.

De plus, $[f(t)\frac{-1}{x}\cos(xt)]_0^1 = \frac{\cos(0)f(0)-\cos(x)f(1)}{x}$. Comme $x \mapsto \cos(0)f(0) - \cos(x)f(1)$ est bornée, le crochet tend lui aussi vers 0, et par somme

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0$$

5. Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On pose $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$. Calculer $I_{n,0},\ I_{0,k},\ I_{1,k}$.

Correction $I_{n,0} = \int_0^1 B_n(t) \times 1\mathrm{d}t = 0$ sauf si $n = 0$ et $I_{0,0} = 1$.
Pour $k > 0$, $I_{0,k} = \int_0^1 \cos(2k\pi t)\mathrm{d}t = 0$.
Toujours pour $k > 0$, $I_{1,k} = \int_0^1 t\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t$ (d'après le calcul de $I_{0,k}$). On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : \frac{1}{2k\pi}\sin(2k\pi t)$ ($\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$). On trouve $I_{1,k} = 0$.

6. Pour $n \geqslant 2$ et $k > 0$, montrer que

$$I_{n,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k}).$$

Correction On effectue la même intégration par parties, avec B_n de classe $\mathcal{C}^1$.
$I_{n,k} = [B_n(t)\frac{1}{2k\pi}\sin(2k\pi t)]_0^1 - \frac{1}{2k\pi t}\int_0^1 B_n'(t)\sin(2k\pi t)\mathrm{d}t$. Le crochet est nul, et on effectue une deuxième intégration par parties, sur des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. $I_{n,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_n'(1) - B_n'(0) - \int_0^1 B_n''(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k})$ car $B_n' = B_{n-1}$ et $B_n'' = B_{n-2}$ car $n \geqslant 2$.

7. En déduire l'expression, pour $p \in \mathbb{N}$ de $I_{2p+1,k}$ et montrer que

$$I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$$

Correction Remarquons, que pour $n \neq 2$, $B_{n-1}(1) = B_{n-1}(0)$ et donc $I_{n,k} = \frac{-1}{(2k\pi)^2}I_{n-2}$ lorsque $n \geqslant 3$.
Notons, pour $p \in \mathbb{N}$, $u_p = I_{2p+1,k}$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{p+1} = \frac{-1}{(2k\pi)^2}u_p$ car $2(p+1)+1 \geqslant 3$. On trouve une suite géométrique de premier terme $I_{1,k} = 0$. Ainsi,

$$I_{2p+1,0} = 0$$

.
En notant $v_p = I_{2p,k}$, on trouve, pour $p \geqslant 1$, $v_{p+1} = \frac{-1}{(2k\pi)^2}v_p$ qui est une suite géométrique, avec $v_0 = I_{0,k}0$ (on est dans le cas $k > 0$) et $v_1 = I_{2,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_1(1) - B_1(0) - I_{0,k}) = \frac{1}{(2k\pi)^2}$.
Finalement, $v_p = \left(\frac{-1}{(2k\pi)^2}\right)^{p-1}\frac{1}{(2k\pi)^2}$ et on a bien

$$I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}$$

8. Soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 1, exprimer en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$ la quantité

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\mathrm{d}t$$

La réponse attendue ne contient pas le symbole $\int$

Correction Calculons

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0))\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \\ &= \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_n(0))(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale (la somme est finie),

$$A = \int_0^1 B_{2m}(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 B_{2m}(0)\mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^1 B_{2m}(t)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t - \int_0^1 B_{2m}(0)\cos(2k\pi t)\mathrm{d}t\right)$$

. Comme $2m > 0$, la première intégrale est nulle.

$A = 0 - B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N}\left(I_{2m,k} - B_{2m}(0)\underbrace{I_{0,k}}_{=0}\right) = -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}$

9. Montrer que $B_{2m}(0) = 2(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$.

   Correction Faisons tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente, l'existence des limites étant prouvée par les question 4 et II.2.

   D'après la question 4, $A \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ donc $B_{2m}(0) = 2(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2m}}$

10. Donner les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$.

    Correction On a $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1}B_{2m}(0)2^{2m-1}\pi^{2m}$.
    Avec $m = 1$, $\zeta(2) = B_2(0) \times 2 \times \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$.
    Avec $m = 2$, $\zeta(4) = -B_4(0) \times 8 \times \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 2

1. (a) Soit n un entier naturel non nul et $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$; Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ qui est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

   Correction D'après le cours, comme $q \neq 1$ on a

   $$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

   (b) En déduire, pour $t \in]0, 1]$, l'expression de

   $$\frac{1-(1-t)^n}{t}$$

   en fonction d'une somme.

   Correction Remarquons que $1 - t \in [0, 1[$ et donc $\sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k = \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)} = \frac{1-(1-t)^n}{t}$, qui est l'expression demandée.

   (c) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

   $$I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t$$

   Étudier la convergence de l'intégrale I_n.

   Correction $f : t \mapsto \frac{1-(1-t)^n}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. Or $(1-t)^n = 1 + nt + o_0(t)$ et donc $f(t) \underset{0}{\sim} n$.
   Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 et donc $\int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}$ converge.
   On peut utiliser la question précédente pour calculer la limite, ou prouver l'existence d'un prolongement, mais l'argument principal reste le même.

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

   $$I_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Correction Par somme d'intégrales convergentes

$$I_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (1-t)^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (1-t)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{-(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$

qui est bien la somme demandée, à un changement d'indice près.

(e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Correction D'après l'exercice précédent, ou d'après le cours, la série harmonique est une série à termes positifs divergente et donc

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} \mathrm{d}t$$

(a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, l'intégrale u_n en fonction de n.

Correction u_n est une intégrale sur un segment. De plus,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{n+t-n}{n+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(1 - n\int_0^1 \frac{1}{n+t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - n\left[\ln(n+t)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \end{aligned}$$

(b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Correction — Méthode 1 : . remarquons que pour $t \in [0,1]$ on a $0 \leqslant \frac{t}{n(n+t)} \leqslant \frac{1}{n(n+t)} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
Par croissance de l'intégrale , $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$; Par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente.

— Méthode 2 :. On a

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2 + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum u_n$ converge.

(c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

Correction Calculons, pour $n > 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right)$.
Ainsi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \ln(1)$$

car la seconde somme est télescopique.
Or (S_n) est une suite convergente d'après la question précédente, ainsi $S_n + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln(1+\frac{1}{n}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est bien convergente par somme de limites finies, ce qui prouve l'existence de γ.

3. Pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(a) On fixe, seulement pour cette question $t \in [0, +\infty[$. Prouver l'existence et calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Correction Pour $n > t$, $1 - \frac{t}{n} > 0$ et donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)$.
De plus, $\frac{t}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $n \ln(1 - \frac{t}{n}) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{-t}{n} = -t$. Par composition de limites,

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\to} e^{-t}$$

Attention à ne pas composer un équivalent pour conclure !

(b) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
On admet que $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} G_n(x)$ pour la suite de l'exercice

Correction Question de cours ! Pour rappel rapide, la convergence en 0 est valable car $x > 0$ et après calcul d'équivalent. La convergence en $+\infty$ est valable par comparaison à $\frac{1}{t^2}$.

4. Calculer $G_n(1)$ puis $\lim_{n \to +\infty} G_n(1)$. Avons nous bien $G_n(1) \underset{n \to +\infty}{\to} \Gamma(1)$?.

Correction Par définition de G_n,

$$G_n(1) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1} \times (-n) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1}\right]_0^n = \frac{n}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

par quotient d'équivalents.
De plus, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t = 1$ d'après le cours et on a bien $G_n(1) \underset{n \to +\infty}{\to} \Gamma(1)$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et tout réel strictement positif x :

$$G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(On pourra utiliser des intégrations par parties.)

Correction Fixons $x > 0$.
Posons un $a > 0$ et évaluons $\int_a^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$ par une intégration par parties.
Les fonctions $u : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ et $v' : t \mapsto t^{x-1}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, n]$ et on a $u' : t \mapsto n \times -\frac{1}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}$ et $v : t \mapsto \frac{1}{x} t^x$ convient.
Ainsi

$$\int_a^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t = \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\right]_a^n + \frac{n}{nx} \int_a^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x \mathrm{d}t$$

. Le crochet est nul en $t = n$ (car la puissance est $n > 0$), et comme $x > 0$, on a $a^x \underset{a \to 0}{\to} 0$. On obtient $G_n(x) = \frac{n}{nx} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x \mathrm{d}t$.
La même intégration par partie (on dérive une deuxième fois u pour obtenir $\frac{n(n-1)}{n^2}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2}$ et on intègre v pour obtenir $\frac{1}{x(x+1)} t^{x+1}$), donne un autre crochet nul lorsque $n - 1 > 0$ (et donc $0^{n-1} = 0$, obtenu en $t = n$) et vu que $x + 1 > 0$ (et donc $a^{x+1} \underset{a \to 0}{\to} 0$) et on obtient

$$G_n(x) = \frac{n}{nx} \times \frac{n-1}{n(x+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1} \mathrm{d}t$$

En itérant k fois, avec $k < n$ pour que $n - k > 0$ on obtient bien

$$G_n(x) = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k x(x+1)\dots(x+(k-1))} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} t^{x-1+k} \mathrm{d}t$$

Vu que $n-k>0$ on peut effectuer une dernière intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{n!}{n^n x(x+1)\dots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^n x(x+1)\dots(x+n-1)}\left[\frac{t^{x+n}}{x+n}\right]_0^n \\ &= \frac{n!}{n^n x(x+1)\dots(x+n-1)}\frac{n^{n+x}}{x+n} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \end{aligned}$$

comme annoncé.

6. On fixe un réel $x>0$.

(a) Montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$ est une série convergente.

Correction Posons, pour $k\geqslant 1$, $v_k=\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}$. Comme $\frac{x}{k}\underset{k\to+\infty}{\to}0$, on a

$$v_k=\frac{x}{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{k}\right)^2+o_{+\infty}(\left(\frac{x}{k}\right)^2)-\frac{x}{k}\underset{+\infty}{\sim}-\frac{x^2}{2k^2}$$

Or $\sum\frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente, et donc par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum v_k$ converge.

(b) Pour N un entier naturel non nul, on pose

$$P_N=\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

Montrer que $(P_N)_{N\geqslant 1}$ est une suite convergente. On note classiquement

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}=\lim_{N\to+\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}$$

Correction Remarquons que tous les termes du produit définissant P_N sont strictement positifs et donc $P_N>0$. Alors

$$\ln(P_N)=\sum_{k=1}^{N}\ln(\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}})=\sum_{k=1}^{N}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$$

qui est une somme partielle de série convergente d'après la question précédente. Donc $(\ln(P_N))$ converge vers une limite ℓ et par composition de limites, (P_N) converge (vers e^{ℓ})

(c) Avec la même notation qu'a la question précédente, montrer que

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}G_n(x)=\frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}$$

Correction Exprimons $G_n(x)$ sous une autre forme.

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{il y a } n+1 \text{ termes au dénominateur} \\ &= \frac{n^x}{x}\frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)} = \frac{e^{x\ln n}}{x}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{1}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\dots\left(\frac{x+n}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{x}\frac{e^{x\ln n}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)} \end{aligned}$$

Nous devons maintenant faire apparaître la constante γ définie en question 2(c)

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \frac{1}{x}\frac{e^{x\ln n}}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\frac{\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}}{\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}}\\
&= \frac{1}{x}\frac{e^{x\ln n}\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}}}{P_n} = \frac{1}{x}\frac{1}{P_n}\exp\left(x\ln n - \sum_{k=1}^{n} xk\right)\\
&= \frac{1}{x}\frac{1}{P_n}\exp\left(x\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

D'après la question 2(c), le facteur de x dans l'exponentielle converge vers $-\gamma$ et d'après la question précédente (P_n) converge, vers une limite non nulle. Par composition de limites (encore une fois, composition par l'exponentielle),

$$G_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{x}\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n}e^{-\gamma x}$$

C'est le résultat voulu, en passant le produit à l'inverse, car $\frac{1}{P_n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}$.

7. On peut montrer (mais pas aujourd'hui) la convergence d'un autre produit infini :

$$\forall x \in]0,1[\quad \frac{\sin(\pi x)}{\pi} = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

En utilisant la question 5, montrer que pour $x \in]0,1[$ on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Correction Reprenons le raisonnement précédent, en remarquant que $x, 1-x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
G_n(x)G_n(1-x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\dots(n+1-x)} \quad \text{regroupons les termes } (a-b)(a+b)\\
&= \frac{n(n!)^2}{x(n+1-x)}\frac{1}{(1-x^2)(2^2-x^2)\dots(n^2-x^2)} \quad \text{même division, mais par } (n!)^2\\
&= \frac{n}{x(n+1-x)}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{n}{n+1-x}\frac{1}{x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)}
\end{aligned}$$

or $\frac{n}{n+1-x} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ et d'après l'identité admise

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Explication "à la Euler" du produit infini pour sin

$x \mapsto \sin(\pi x)$ s'annule exactement à tous les entiers relatifs (ce sont ses "racines"), tout comme $x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$ (l'un exactement des termes du produit est nul).

Il ne reste qu'à vérifier que ces "polynômes" (bien sûr, ce ne sont pas des polynômes...) ont le même coefficient dominant (ils ont les mêmes racines). pour cela on vérifie qu'ils ont une valeur en commun, et on calcule un équivalent en 0. $\sin(\pi x) \underset{0}{\sim} \pi x$ et le produit est équivalent à x. Il faut donc rectifier le coefficient dominant et c'est $\frac{\sin(\pi x)}{\pi}$ qui est égal à ce produit....