Table des matières

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{R}$-ev.

I Espace préhilbertien, espace euclidien

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}\forall u,v,w\in E\ \varphi(\lambda u+\mu v,w)=\lambda\varphi(u,w)+\mu\varphi(v,w)$ et $\varphi(u,\lambda v+\mu w)=\lambda\varphi(u,v)+\mu\varphi(u,w)$.
2. Symétrique : $\forall u,v\in E\ \varphi(u,v)=\varphi(v,u)$.
3. Positive : $\varphi(u,u)\geqslant 0$.
4. Définie : $\varphi(u,u)=0\Rightarrow u=0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Quand φ est un produit scalaire, on note plutôt $(u|v), \langle u,v\rangle$, ou $u\cdot v$ à la place de $\varphi(u,v)$

Explication Cette définition du produit scalaire nous permet de nous passer de la notion d'angle et de distance (ou norme). Ce sont exactement les propriétés du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ déjà étudié.

I.1.2 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.1.3 Remarque

1. La bilinéarité implique que $(0_E|u)=(u|0_E)=0$ pour tout $u\in E$.
2. Pour vérifier qu'une application est bilinéaire, on vérifie une seule linéarité. Ensuite on prouve la symétrie, qui prouve à son tour automatiquement la deuxième linéarité.

I.1.4 Exemple

Il faut connaître ces exemples, ainsi que savoir les prouver.

1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: rappelons que pour deux colonnes $X,Y\in\mathbb{R}^n$, l'application $\varphi(X,Y)=X^TY=\langle X,Y\rangle$ est bien un produit scalaire au sens de ce chapitre.
2. Cette fois $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi:(A,B)\mapsto \mathrm{tr}(A^TB)$. Montrons que φ est un produit scalaire. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi(B,A)=\mathrm{tr}(B^TA)=\mathrm{tr}\left((A^TB)^T\right)=\varphi(A,B)$ car la trace est invariante par transposition.
   La linéarité à droite est immédiate par composition de deux applications linéaires.
   Calculons $\varphi(A,A)$. On note $A=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. Alors $\mathrm{tr}(A^TA)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,i}$ est la somme des carrés de tous les coefficients de A. Ainsi $\varphi(A,A)\geqslant 0$ et on a même $\varphi(A,A)=0$ ssi tous les termes de la somme sont nuls (somme de réels positifs) ie $A=0$.
3. Montrons que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b fg \end{array} \right.$ est bien un produit scalaire.
   La symétrie provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}^{[a,b]}$. La linéarité à gauche est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.
   Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors $\varphi(f,f)=\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   De plus si $\varphi(f,f)=0$ alors $\int_a^b f^2=0$ et donc f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur le segment $[a,b]$. Ainsi $f^2=0$ et donc $f=0$.
4. On se place dans $E=\mathbb{R}[X]$ et pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ on pose $\varphi(P,Q)=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
   Montrons que φ est un produit scalaire. Symétrie, bilinéarité, positivité : voir l'exemple précédent.
   Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P)=0$. Montrons que P est le polynôme nul. Pour l'instant on sait que la fonction polynomiale associée est nulle sur le segment $[0,1]$. Ainsi P possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

I.1.5 Remarque

On peut le plus souvent définir plusieurs produits scalaires sur un même espace. Par exemple, $\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)\mapsto xx'+2yy'$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

I.2 Théorèmes

I.2.1 Théorème
Toutes les définitions et propriétés portant sur les produits scalaires et les normes vues dans le chapitre 10 sur le théorème spectral sont encore valables dans un espace euclidien E (c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini dans lequel on a défini un produit scalaire) ou dans un espace préhilbertien (la même chose, mais en dimension infini, par exemple $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire intégral). La seul condition est de remplacer la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une base orthonormée de E.

En particulier on pourra utiliser les notions :

- norme d'un vecteur, elle est nulle ssi le vecteur est le vecteur nul.
- lien norme-produit scalaire (définition de la norme, identité de polarisation)
- inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
- orthogonalité de vecteurs, liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et non nuls. Théorème de Pythagore
- base orthonormée et calcul des coordonnées dans une telle base
- procédé de Gram-Schmidt pour créer une base orthogonale ou orthonormale à partir d'une base existante
- espaces orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace (avec un bémol, voir la proposition suivante)

Preuve.
Seules les 4 propriétés définissant un produit scalaire ont été utilisées pour prouver tous ces résultats. ∎

I.2.2 Théorème (Rappel : coordonnées dans une base orthonormée)
Soit E un espace euclidien (le produit scalaire est noté $\langle ; \rangle$) et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de E.

Soit $x,y\in E$ et notons $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$

1. $\forall k\in[\![1,n]\!]\ x_k=\langle x,e_k\rangle$ ou encore $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$.
2. $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=X^TY$.

I.2.3 Exemple
Soit E un espace euclidien de dimension 2, et $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ une base orthonormale. Montrer que $\mathcal{B}'=(u_1,u_2)$ avec $u_1=\frac{4e_1+3e_2}{5}$ et $u_2=\frac{-3e_1+4e_2}{5}$ est une BON de E. Que dire de la matrice ?

I.2.4 Exemple (Gram-Schmidt)
On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit échelonnée en degré.

Posons $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On cherche une base orthogonale notée (Q_0,Q_1,Q_2).

1. On pose $Q_0=P_0=1$.
2. On cherche Q_1 sous la forme $Q_1=P_1-\alpha Q_0$ (donc de degré 1) tel que $Q_0\perp Q_1$.

   Alors $\langle Q_1,Q_0\rangle=0\iff\langle P_1,Q_0\rangle-\alpha\langle Q_0,Q_0\rangle=0\iff\displaystyle\int_{-1}^{1}t\times 1\mathrm{d}t-\alpha\int_{-1}^{1}1\times 1\mathrm{d}t=0$.

   On trouve $\alpha=0$ et donc $Q_1=P_1=X$.
3. On cherche Q_2 sous la forme $Q_2=P_2-aQ_0-bQ_1$ (donc de degré 2) tel que $Q_2\perp\mathrm{Vect}(Q_0,Q_1)$.

   $\langle Q_2,Q_0\rangle=0\iff\langle P_2,Q_0\rangle-a\langle Q_0,Q_0\rangle-0=0\iff\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\times 1\mathrm{d}t-2a=0\iff\frac{2}{3}-2a=0$ et donc $a=\frac{1}{3}$.

   $\langle Q_2,Q_1\rangle=0\iff\langle P_2,Q_1\rangle-b\langle Q_1,Q_1\rangle=0\iff 0-b\times\frac{2}{3}=0\iff b=0$.

   Finalement, $Q_2=X^2-\frac{1}{3}$.

Pour trouver une base orthonormée, il suffit maintenant de diviser par les normes (déjà calculées, sauf pour Q_2).

$$\|Q_2\|^2=\langle Q_2,Q_2\rangle=\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2\mathrm{d}t=\frac{8}{45}$$

et donc

I.2.5 Remarque

1. Tout espace euclidien admet une BON.
2. Le procédé de Gram-Schmidt ne change pas une famille orthogonale (sauf à la normaliser si on veut obtenir une BON).

I.2.6 Remarque

Si on orthonormalise $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, la condition de conservation des espaces vectoriels croissants assure que $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ (la matrice de passage) est triangulaire supérieure.

I.2.7 Proposition (Orthogonal d'un sous espace)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de E.
Si F est de dimension finie, alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

Preuve.

— $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ car le seul vecteur orthogonal à lui même est le vecteur nul.

— Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de F que l'on suppose orthonormale (on a appliqué le procédé de Gram-Schmidt).

Soit $x \in E$.

— Analyse. Supposons que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$.

Alors, pour $k \in [\![1, r]\!]$, $\langle x, e_k \rangle = \langle x_1, e_k \rangle + 0_{\mathbb{R}}$. Comme de plus $x_1 = \sum\limits_{k=1}^{r} \langle x_1, e_k \rangle e_k$ (expression des coordonnées par le produit scalaire, dans une base orthonormée), on a

$$x_1 = \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k \rangle \text{ et } x_2 = x - x_1$$

— Synthèse. Posons $x_1 = \sum\limits_{k=1}^{r} \langle x, e_k \rangle e_k$ et $x_2 = x - x_1$.

Alors clairement, $x = x_1 + x_2$ et $x_1 \in F$. il reste à montrer que $x_2 \in F^{\perp}$ c'est à dire $x_2 \perp F$. Nous allons montrer que $x_2 \perp e_i$ pour tout i.

$$\begin{aligned}
\langle x_2, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle x_1, e_i \rangle &= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle \langle x, e_k \rangle e_k, e_i \rangle \\
&= \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle \text{ encore une linéarité} \\
&= \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \text{ tous les autres termes de la somme sont nuls} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et on a bien $x_2 \in F^{\perp}$.

Finalement, $F \oplus F^{\perp} = E$ ■

I.2.8 Exemple
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux. Rappelons qu'ils sont également supplémentaires, et donc $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

En effet, si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\operatorname{tr}(A^T B) = \operatorname{tr}(B^T A) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(BA^T) = -\operatorname{tr}(A^T B) = 0$ où on a utilisé dans l'ordre : la symétrie su produit scalaire, la définition de matrice anti-symétrique ainsi que la linéarité de la trace, la définition de matrice symétrique, puis finalement la symétrie su produit scalaire.

I.3 Projections et symétries orthogonales

I.3.1 Définition
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^{\perp}$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.

I.3.2 Remarque

1. On a bien $E = F \oplus F^{\perp}$...
2. On pourra se souvenir de la formule $s = 2p - Id$ pour lier les deux objets précédents.
3. pour $x \in E$, on a les deux conditions géométriques $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

I.3.3 Exemple
Matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} : 2x - y = 0$.

I.3.4 Proposition
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(u_1, \dots, u_r)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est **de norme 1**.

Preuve.
Il s'agit d'un re-formulation de la preuve de I.2.7 ■

I.3.5 Méthode

1. On détermine $p_F(x)$ en remarquant que

$$\begin{aligned} p_F(x) &\in F \\ x - p_F(x) &\perp F \end{aligned}$$

donc est orthogonal à une base de F.

2. On utilise la formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|f_i)f_i$ si on connaît une BON de F.

I.3.6 Définition
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

I.3.7 Réduction

Matrice, trace, det dans des bases adaptées.

I.3.8 Exemple
Dans $\mathbb{R}^3$ on pose : $F = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix})$. Calculer les matrices dans la base canonique des projection orthogonales sur F et symétrie orthogonales par rapport à F.

I.3.9 Proposition (Inégalité de Bessel)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

$$\forall x \in E \ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Preuve.
Soit $x \in E$. On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et donc d'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. On conclut en remarquant qu'un carré de réel est toujours positif et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. ■

I.3.10 Exercice
Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs. Plus précisément, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E on a

$$\forall x \in E \ \|p(x)\| \leqslant \|x\| \iff p \text{ est un projecteur orthogonal}$$

Indication : on pourra poser un vecteur non nul x du noyau de p et considérer la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x)$.

I.3.11 Théorème (Moindres carrés)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

Preuve.
Notons $x_0 = p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Alors $x_0 \in F$ et donc $d(x, F) \leqslant d(x, x_0)$.

De plus, si $y \in F$ alors $x - y = x - x_0 + x_0 - y$ et donc $\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$ car $\underbrace{x - x_0}_{\in F^\perp} \perp x_0 - y$ et d'après le théorème de Pythagore.

Ainsi pour tout $y \in F$ $d(x, y) \geqslant d(x, x_0)$ et donc $d(x, F) = d(x, x_0)$. Le calcul précédent montre que ce minimum n'est atteint qu'en x_0. ■

I.3.12 Remarques

1. Ce théorème donne avant tout l'existence d'un minimum.
2. Avec les notations de la preuve, $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ (toujours d'après Pythagore). Ainsi, on a un moyen pratique de calculer la valeur de ce minimum, il s'agit de calculer une projection orthogonale.

I.3.13 Traduction dans une BON

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une BON de F

1. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i$.
2. $d(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)^2$.

I.3.14 Exemple

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dt$. Il s'agit de calculer, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ munit du produit scalaire intégrale, le projeté de l'exponentielle sur le sous espace des fonctions affines (qui est de dimension 2).

II Isométries

Le cadre ici est celui des espaces euclidiens, et plus particulièrement des espaces euclidiens de petites dimension. E sera donc toujours un espace euclidien et on abusera sans retenue du théorème I.2.2 de calcul des coordonnées dans une base orthonormée.

II.1 Cas général

II.1.1 Définition-Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$ C'est évident. On pourrait prouver que si f n'est pas forcément linéaire mais conserve le produit scalaire, alors elle est linéaire.

— $2 \Rightarrow 1$ On a pour tous $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(f(x)|f(x)) &= \frac{1}{2}(\|\underbrace{f(x)+f(y)}_{=f(x+y)}\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - |y\|^2) = (x|y)\end{aligned}$$

Comme f conserve la norme, on a $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ donc f est injective donc bijective car E est de dimension finie. ■

II.1.2 Exemple

1. L'identité est clairement dans $O(E)$.
2. Toute symétrie orthogonale est dans $O(E)$. Le vérifier en revenant à la définition $s(x) = x_F - x_G$ avec $x_F \perp x_G$.
3. Les projections sur tout sous-espace strict ne sont pas des automorphismes (noyau non trivial).

II.1.3 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$f \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$$

Preuve.

Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors le théorème I.2.2 montre que

$$\underbrace{\|x\|}_{\text{norme dans E}} = \underbrace{\|X\|}_{\text{norme dans } \mathbb{R}^n} \quad \text{et } \|MX\| = \|f(x)\|$$

$\mathrm{Mat}_B(f(x)) = MX = \mathrm{Mat}_B(f) \times \mathrm{Mat}_B(x)$

Comme l'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_B(x)\end{array}\right.$ est bijective on a bien $f \in O(E)$ ssi $M \in O_n(\mathbb{R})$ (voir la caractérisation numéro 6 dans le chapitre 10). ■

Explication A condition de se placer dans une BON, on peut passer des endomorphismes orthogonaux aux matrices orthogonales.

II.1.4 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Preuve.
Simple traduction de la même propriété sur les matrices orthogonales ■

II.1.5 Exemple
Montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$ est orthogonale.

II.1.6 Proposition
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Preuve.
Idem ■

II.1.7 Exercice
Dans E euclidien, soit F un sous-espace et $f \in O(E)$. Montrer que $f(F)^\perp = f(F^\perp)$. (inclusion facile + dimension qui est conservée par les iso)

II.1.8 Proposition
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par f.

Preuve.
Supposons que F est stable par f et soit $x \in F^\perp$. On doit montrer que $f(x) \in F^\perp$.

Soit donc $y \in F$. Montrons que $(f(x)|y) = 0$. Or $(f(x)|y) = (x|f^{-1}(y))$. De plus, f est bijective donc $f(F) = F$ (égalité des dimensions). Ainsi $f^{-1}(y) \in F$ et donc $(x|f^{-1}(y)) = 0$.

Finalement, $f(x) \in F^\perp$. ■

II.1.9 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{ est symétrique et } M \in O_n(\mathbb{R}) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

Preuve.
Si M est symétrique on a à la fois $M^T = M$ et $M^T = M^{-1}$. Ainsi f est une symétrie. Montrons que $\ker(f - Id_E) \perp \ker(f + Id_E)$. Soient $x_1, x_2 \in E \backslash \{0_E\}$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$ (des vecteurs propres). Montrons que $x_1 \perp x_2$. Or f est une isométrie, donc $(x_1|x_2) = (f(x_1)|f(x_2)) = (x_1|-x_2) = -(x_1|x_2)$ et donc $(x_1|x_2) = 0$. Finalement la symétrie f est bien orthogonale.

Réciproquement, supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors $M = M^{-1}$. De plus, M est une matrice orthogonale car f est une isométrie et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. ■

II.2 Groupe orthogonal en dimension 2

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique.

II.2.1 Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

II.2.2 Interprétation géométrique

1. Donner l'image d'un vecteur unitaire par R_θ. C'est la matrice de la rotation d'angle θ
2. On note $\mathcal{D} : -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = 0$. Calculer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

II.2.3 Proposition (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

Preuve.

— On commence par remarquer que toutes les matrices R_θ sont clairement dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. Alors $\begin{cases} a^2+b^2 &= 1 \\ c^2+d^2 &= 1 \\ ad-bc &= 1 \end{cases}$

On peut donc écrire, d'après les deux première équations $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$ et $c = \cos\psi, d = \sin\psi$. Maintenant la condition sur le déterminant est

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = 1 \text{ ie. } \cos(\varphi+\psi) = 1$$

On en déduit que $\varphi + \psi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\sin\psi = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ et $\cos\psi = \cos\varphi$. CQFD.

— On peut faire la même démonstration avec $\det M = -1$ et trouver le résultat annoncé. ■

II.2.4 Traduction sur les isométries

Soit $f \in O(\mathbb{R}^2)$ une isométrie du plan. Alors f est une rotation ssi $\det(f) = 1$ et f est une réflexion ssi $\det(f) = -1$.

Dans le cas d'une rotation, il suffit de déterminer l'image d'un vecteur de base pour en déduire l'angle. pour une réflexion, on cherche la droite de point fixe pour la caractériser géométriquement.

II.2.5 Exemple

Calculer $R_\theta S_\varphi$. On pourra d'abord remarquer que c'est une matrice d'isométrie négative.

II.2.6 Composition de deux réflexions

La composée de deux réflexion est une rotation du plan. Il reste à déterminer l'angle.

II.2.7 Valeurs propres

1. Les matrices de rotations $R_\theta \neq \pm I_2$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Leurs valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$.
2. Les réflexions sont diagonalisables, de valeurs propres 1 et -1 (multiplicité 1).

II.3 Groupe orthogonal en dimension 3

On se place maintenant dans $E = \mathbb{R}^3$ espace euclidien de dimension 3, et $\mathcal{B}_c$ est une base directe.

II.3.1 Définition-Proposition

Si f est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \text{Vect}(u)$ orienté par le vecteur unitaire u, alors dans toute base orthonormée de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (le premier vecteur doit être u) on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante : $\text{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u)^\perp$, f est la rotation d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le "dessus" de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. Si on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

Preuve.

Il faut prouver qu'en changeant de base orthonormée directe, on conserve la même matrice.

Soit $\mathcal{B}' = (u, v', w')$ une base orthonormée directe de E et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $P \in SO_3(\mathbb{R})$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

car les colonnes doivent former une base orthonormée directe : ceci impose les 0 dans la première ligne pour l'orthogonalité à la première colonne et la troisième colonne est calculée par produit vectoriel.

Alors, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in So_2(\mathbb{R})$ (les colonnes de P sont de norme 1) et donc on peut poser $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix}$ en notation par bloc.

Alors $P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {R_\varphi}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\varphi} \end{pmatrix}$.

Un calcul direct (et un peu de trigonométrie) montre alors que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \underbrace{=}_{\text{changement de base}} P^{-1}\,\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P \underbrace{=}_{\text{calcul}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

■

II.3.2 Proposition
Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Si f possède une valeur propre λ réelle, alors $\lambda = \pm 1$.

Preuve.
Soit $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.

Alors $\|f(x)\| = \|x\|$ car f est une isométrie. On a donc $\|\lambda x\| = \|x\|$ ou encore $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ Ainsi $|\lambda| = 1$ car x est non nul donc de norme non nulle.

Plus généralement, soit M la matrice dans une base orthonormée de f et $\lambda \in Sp(M)$ réelle ou non. Soit également un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ propre de M associé à λ.

Alors $\bar{X}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$ (car M est à coefficients réels) et on a $\left(A\bar{X}\right)^T AX = \bar{\lambda}\bar{X}^T\lambda X = |\lambda|^2\bar{X}^T X$.

Si on note $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix}$ alors $\bar{X}^T X = \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$.

De plus, comme A est orthogonale, $\left(A\bar{X}\right)^T AX = \bar{X}^T A^T AX = \bar{X}^T X$. Ainsi $\|\lambda^2\| = 1$ et λ est de module 1. ■

II.3.3 Etude des valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. Comme 3 est impair, χ_f possède une racine réelle qui vaut forcément ± 1. Notons u un vecteur propre associé à $\lambda = \pm 1$.

Alors $P = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ est stable par f et $f_{|P}$ est une isométrie d'un plan vectoriel. Ainsi $f_{|P}$ est une rotation ou une réflexion. Si $f_{|P}$ est une réflexion, alors f est une symétrie orthogonale. Dans le cas où $f_{|P}$ est une rotation il y a plusieurs possibilités :

— Cas $\lambda = 1$. f est une rotation de l'espace.

— Cas $\lambda = -1$. f est la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion. L'axe de rotation est $\mathrm{Vect}(u)$ et le plan de réflexion est P.

Dans une BOND $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (en prenant u de norme 1, c'est toujours possible), alors (v, w) est une base orthonormée de P et on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et le produit commute bien.

II.3.4 Théorème
Soit $f \in O(E)$ avec E de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

II.3.5 Etude d'une matrice orthogonale

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose $M \neq \pm I_3$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Si M est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale. Si $\mathrm{tr}(M) = 1$ il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si $\mathrm{tr}(M) = -1$ il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
   (a) Si $\det(M) = 1$, alors f est une rotation.
   (b) Si $\det(M) = -1$ alors $-M$ est une matrice de rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ. Alors f est la composée de la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\theta + \pi$.

II.3.6 Exemple

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. M est symétrique donc il s'agit d'une matrice de symétrie orthogonale. Comme $\mathrm{tr}(M) = -1$, il s'agit d'une symétrie axiale.

On détermine l'axe comme ensemble des points fixes, ie comme noyau de $M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(M - I_3)X = 0$ donc M est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.3.7 Déterminer une rotation

Soit M une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$.

1. Etape 1 : déterminer l'axe. Il s'agit de l'ensemble des points fixes, ou encore de l'espace propre associé à la valeur propre 1. On fixe u de norme 1 directeur de l'axe.
2. Etape 2 : déterminer l'angle. On le note $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   On a déjà, $\mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on connaît $\cos(\theta)$ facilement. Il reste à trouver le signe de θ, ie le signe de $\sin(\theta)$.
   Fixons v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une BOND. Alors
   $$\det_{\mathcal{B}}(u, v, Mv) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$
   Si maintenant $X \in \mathbb{R}^3$ n'est pas sur l'axe de rotation, on écrit $X = au + X_P$ où X_P est non nul et orthogonal à u. Alors, dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, \frac{X_P}{\|X_P\|}, u \wedge \frac{X_P}{\|X_P\|})$, $\det_{\mathcal{B}'}(u, X, MX) = \det(u, X_P, MX_P) = \|X_P\|^2 \sin(\theta)$ car $Mu = u$ et par opération élémentaire sur les colonnes.

II.3.8 Proposition
Soit $M \in So_3(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (orienté par u) et d'angle θ vérifiant :

1. D est le noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Pour X un vecteur $X \notin D$. θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg(\det(u, X, MX)) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend pour X un vecteur de la base canonique.

II.3.9 Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation dont on précisera un axe dirigé et l'angle correspondant.

On a facilement $\det(M) = 1$ par deux échanges de colonnes. Clairement les colonnes de M forment une BON (qui est donc directe car $\det(M) > 0$).

L'ensemble des points fixes est $E_1(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on pose $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire qui dirige et oriente l'axe de rotation. L'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(M) = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. De plus, en posant $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas sur l'axe de rotation, $\sin(\theta)$ est du signe de $[u, v, Mv] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ par développement suivant la 3ème ligne. Finalement $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Index