Table des matières

I Espace préhilbertien, espace euclidien

I.1 Produit scalaire

Définition 1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R} \forall u,v,w\in E$ $\varphi(\lambda u+\mu v,w)=\lambda\varphi(u,w)+\mu\varphi(v,w)$ et $\varphi(u,\lambda v+\mu w)=\lambda\varphi(u,v)+\mu\varphi(u,w)$.
2. Symétrique : $\forall u,v\in E$ $\varphi(u,v)=\varphi(v,u)$.
3. Positive : $\varphi(u,u)\geqslant 0$.
4. Définie : $\varphi(u,u)=0\Rightarrow u=0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Quand φ est un produit scalaire, on note plutôt $(u|v)$, $\langle u,v\rangle$, ou $u\cdot v$ à la place de $\varphi(u,v)$

Définition 2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.2 Théorèmes

Théorème 1
Toutes les définitions et propriétés portant sur les produits scalaires et les normes vues dans le chapitre 10 sur le théorème spectral sont encore valables dans un espace euclidien E (c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini dans lequel on a défini un produit scalaire) ou dans un espace préhilbertien (la même chose, mais en dimension infini, par exemple $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire intégral). La seul condition est de remplacer la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une base orthonormée de E.

En particulier on pourra utiliser les notions :
- norme d'un vecteur, elle est nulle ssi le vecteur est le vecteur nul.
- lien norme-produit scalaire (définition de la norme, identité de polarisation)
- inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
- orthogonalité de vecteurs, liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et non nuls. Théorème de Pythagore
- base orthonormée et calcul des coordonnées dans une telle base
- procédé de Gram-Schmidt pour créer une base orthogonale ou orthonormale à partir d'une base existante
- espaces orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace (avec un bémol, voir la proposition suivante)

Théorème 2 (Rappel : coordonnées dans une base orthonormée)
Soit E un espace euclidien (le produit scalaire est noté $\langle;\rangle$) et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de E.

Soit $x,y\in E$ et notons $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$

1. $\forall k\in[\![1,n]\!]$ $x_k=\langle x,e_k\rangle$ ou encore $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$.
2. $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=X^TY$.

Proposition 1 (Orthogonal d'un sous espace)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de E.

Si F est de dimension finie, alors $F\oplus F^\perp=E$.

I.3 Projections et symétries orthogonales

Définition 3
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

Proposition 2
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(u_1, \ldots, u_r)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E \; p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est **de norme 1**.

Définition 4
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

Proposition 3 (Inégalité de Bessel)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

$$\forall x \in E \; \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Théorème 3 (Moindres carrés)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

II Isométries

II.1 Cas général

Définition-Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y \; (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E \; \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Corollaire 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$f \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$$

Proposition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Proposition 5
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Proposition 6
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par f.

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{ est symétrique et } M \in O_n(\mathbb{R}) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

II.2 Groupe orthogonal en dimension 2

Définition 5
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Proposition 8 (Caractérisation de $\boldsymbol{O_2}(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

II.3 Groupe orthogonal en dimension 3

Définition-Proposition 2
Si f est la rotation d'angle θ autour de l'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ orienté par le vecteur unitaire u, alors dans toute base orthonormée de la forme $\mathcal{B} = (u, v, w)$ (le premier vecteur doit être u) on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique est la suivante : $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$, f est la rotation d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le "dessus" de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. Si on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

Proposition 9
Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Si f possède une valeur propre λ réelle, alors $\lambda = \pm 1$.

Théorème 4
Soit $f \in O(E)$ avec E de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

Proposition 10
Soit $M \in So_3(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (orienté par u) et d'angle θ vérifiant :

1. D est le noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Pour X un vecteur $X \notin D$. θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg(\det(u, X, MX)) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend pour X un vecteur de la base canonique.