Exercice 1
On considère l'équation (E) $(1+x^2)y''+xy'-y=0$.

1. Déterminer une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 2
On considère l'équation différentielle (E) : $y''-2xy'-2y=0$.

1. Déterminer une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0)=1$ et $f'(0)=0$, sous forme de fonction développable en série entière.
2. Montrer que f ne s'annule pas.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Résoudre $x^2y''+4xy'-(x^2-2)y=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ puis sur $\mathbb{R}$.
(on pourra poser $z : x \mapsto x^2y(x)$)

Exercice 4

1. Vérifier que la fonction $f : x \to (\arcsin x)^2$ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$\left(1-x^2\right)y''(x)-xy'(x)=2. \tag{E}$$
2. On cherche une fonction développable en série entière vérifiant **??** ainsi que les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.
On cherchera y sous la forme $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$ où les a_n sont des réels à déterminer.
   (a) Montrer que pour $n\geqslant 1$ on a $a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n$.
   (b) En déduire l'expression de a_{2n+1} puis celle de a_{2n} pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.
4. Bonus : Montrer que la série converge pour $x=1$. Que peut-on conjecturer sur sa limite ?

Exercice 5
Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y''(x)-x(1+x)y'(x)+y(x)=0.$$

Reconnaître les sommes des séries trouvées.

En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Exercice 6
On considère le système différentiel (S) : $\begin{cases} x'=4x-3y+2z \\ y'=6x-5y+4z \\ z'=4x-4y+4z \end{cases}$, où x,y et z sont trois fonctions de la variable t, de classe $\mathcal{C}^1$.

1. De quel type de système s'agit - il ? Montrer que les trajectoires (les fonctions $t\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ solutions) de (S) sont contenues dans des plans parallèles.
2. Déterminer la solution de (S) dont la trajectoire Γ passe par $M\,(1;3;3)$ à l'instant $t=0$. Préciser une équation du plan qui la contient.

Exercice 7
Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1'=2y_1+y_2-2y_3 \\ y_2'=y_1 \\ y_3'=2y_1-y_3 \end{cases}$ et donner la solution au problème de Cauchy en $(0,(a,b,c))$.

Exercice 8
Résoudre (E) : $X'(t)=AX+B$ avec $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -te^t \end{bmatrix}$.

Exercice 9
Résoudre le système différentiel réel : $\begin{cases} y_1'=3y_1+y_2 \\ y_2'=-y_1+y_2 \end{cases}$ en posant $z_1=y_1+y_2$ et $z_2=y_1-y_2$.