Suites

Exercice 1

Calculer en fonction de n le terme général de $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 2u_n + 1$. *Calculer* $\sum_{n=0}^{N} u_n$
2. $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{5}$. *Calculer* $\sum_{n=0}^{N} u_n$
3. $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = u_n + 2^n$. *Calculer* $\sum_{n=0}^{N} u_n$
4. $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 2u_n^2$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que si $(u_n)_n$ est décroissante alors elle est stationnaire. Indication : commencer par intuiter la valeur à laquelle la suite stationne et l'exprimer en terme de l'ensemble des valeurs de la suite.

Exercice 3

On définit la suite $(a_n)_n$ par $a_0 = 3, a_1 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$.

1. *Montrer que a_n est un entier impair pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Déterminer l'expression de a_n en fonction de l'entier naturel n.*
3. *On pose $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_n = \lfloor x^n \rfloor$ pour tout n. Montrer que n et x_n ont la même parité*

Borne supérieure

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Dans cet exercice on souhaite montrer que f possède un point fixe.

1. *Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement $f : [0,1[\to [0,1[$. Un bon schéma pourra constituer une preuve.*
2. *On pose $T = \{x \in [0,1] |\ f(x) \leqslant x\}$. Montrer que T possède une borne inférieure notée t.*
3. *Montrer que $f(t)$ minore T.*
4. *Montrer que $f(T) \subset T$.*
5. *En déduire que $f(t) = t$.*

Partie entière

Exercice 5

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\ E(2x) = E(x) + E(x + \frac{1}{2})$.

Exercice 6

Etudier la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$, y compris sa périodicité. Que dire de sa continuité ?

Diviseurs

Exercice 7

Montrer que tous les nombres de la forme $4n^2 - 1$ (pour $n \geqslant 2$) sont composés, c'est à dire ne sont pas premiers.

Exercice 8

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ on a $9 | 10^n - 1$*
2. *Soit $a \in \mathbb{N}$ et $(a_k a_{k-1} \dots a_0)_{10}$ son écriture en base 10. Montrer que $9|a$ ssi $9|a_0 + a_1 + \cdots + a_k$.*
   Que peut-on dire de la divisibilité par 3 ?

PGCD

Exercice 9

Soient $a, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

1. *Montrer que a est un carré parfait (le carré d'un autre naturel) ssi toutes les puissances de sa décomposition en facteurs premiers sont paires.*
2. *On suppose $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ et $ab = u^2$ pour un $u \in \mathbb{N}$. Montrer que a et b sont des carrés parfait.*

Exercice 10

On cherche à résoudre dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

1. *Montrer que si* (x, y, z) *est un triplet solution alors* (dx, dy, dz) *l'est encore pour tout* $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *On cherche alors les solutions qui n'ont pas de diviseur en commun.*
2. *Analyse : on suppose que* (x, y, z) *est un triplet solution qui vérifie* $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.
   (a) *Analyser la parité de* x^2 *en fonction de la parité de* x.
   (b) *Montrer que l'un de* x *ou* y *est pair, l'autre impair et que* z *est impair. On prendra* x *pair.*
   (c) *On pose* $u = \frac{x}{2}, v = \frac{z+y}{2}$ *et* $w = \frac{z-y}{2}$ *des entiers. Montrer que* v *et* w *sont des carrés parfaits.*
   (d) *Montrer que l'on a* $x = 2ab, y = a^2 - b^2$ *et* $z = a^2 + b^2$ *pour* $a, b \in \mathbb{N}$ *non nuls avec* $a > b$ *et tels que* $\text{pgcd}(a, b) = 1$.
3. *Synthèse. Soient* $a, b \in \mathbb{N}$ *tels que* $\text{pgcd}(a, b) = 1$ *et* $a > b$. *Montrer que* $\alpha = 2ab, \beta = a^2 - b^2, \gamma = a^2 + b^2$ *vérifient* $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ *et* $\text{pgcd}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$.

Exercice 11

Soient $a, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *On pose* $d = \text{pgcd}(a, b)$.

1. *Montrer que* $d | au + bv$ *pour tout* $u, v \in \mathbb{Z}$ *tels que* $au + bv \in \mathbb{N}$.
2. *On pose* $c = \min(\{au + bv \in \mathbb{N}\backslash\{0\} |\ u, v \in \mathbb{Z}\})$. *On note* E *l'ensemble considéré ici.*
   (a) *Montrer que* $c|a$ *et* $c|b$.
   (b) *Montrer que* $c = d$
3. *Montrer que* $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_d$ *en revenant à la définition de* $\mathbb{U}_n$.