Devoir maison n°16

A rendre le 22/03

Exercice 1
Dans cet exercice, se place dans $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel.

On considère n points de $\mathbb{R}^2$, $M_i : \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, et on cherche une droite $\mathcal{D} : y = ax+b$ qui serait une "meilleure approximation affine" du nuage de point $\{M_i,\ i \in [\![1,n]\!]\}$. Pour cela on cherche à minimiser la quantité (dépendant de a et b).

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2$$

qui représente la somme des carrés des distances obtenues par projection verticale. C'est la méthode des moindres carrés.

1. Première méthode. On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, exprimer $S(a,b)$ sous forme d'une norme faisant intervenir X, Y, U.
   (b) Montrer que $S(a,b)$ est minimal lorsque $aX + bU$ est le projeté orthogonal de Y sur $F = \mathrm{Vect}(U, X)$.
   (c) En déduire que le couple (a,b) cherché est solution du système
   $$\begin{cases} a\sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \\ a\sum_{i=1}^n x_i^2 + b\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$
   (d) Montrer que si les M_i n'ont pas tous la même abscisse, alors le système de la question précédente (d'inconnues a, b) est un système de Cramer. [1]
   (e) En notant M la matrice du système précédent, exprimer l'unique solution du système en fonction de M et de produits scalaires.
   (f) Écrire en python une fonction `regression(X, Y)` qui prend comme arguments une liste d'abscisses `X` (pas toutes égales) et une liste d'ordonnées `Y` de même longueur, et retournant les flottants a, b correspondants aux points dont les coordonnées sont données.
   On pourra utiliser `numpy.linalg.solve` pour résoudre le système considéré.
2. Deuxième méthode. On considère la fonction $S : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2 \end{array} \right.$.
   (a) Calculer $\frac{\partial S}{\partial a}$ et $\frac{\partial S}{\partial b}$.
   (b) On suppose encore que les M_i n'ont pas tous la même abscisse. Montrer que S possède une unique point critique (il s'agit d'un point où le gradient s'annule, c'est à dire les deux dérivées partielles précédentes sont nulles en ce point) en un point à déterminer.
   La question précédente montre que ce point critique correspond en fait à un minimum.

1. On pourra aller réviser l'inégalité de Cauchy-Schwartz, ainsi que son cas d'égalité.

1. (a) De quel vecteurs les $ax_i + b$ sont-ils les coordonnées ?
   (b) Reprendre la démonstration du cours au besoin.
   (c) Méthode de projection orthogonale.
   (d)
   (e) Il faut d'abord mettre le système à résoudre sous forme matricielle.
   (f) Consulter la documentation de la fonction proposée.
2. (a)
   (b)