Devoir surveillé n°5

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Application directe du cours)

Dans cet exercice on souhaite trouver toutes les solutions de l'équation

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 7y'' - y' + 6y = 0 \qquad (E_H)$$

1. Résoudre directement (E_H) en posant son équation caractéristique.
2. On pose maintenant $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les endomorphismes de E :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' - f \end{array} \right. , \ \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f'' + f' - 6f \end{array} \right.$$

   (a) Calculer $\varphi(\psi(f))$ pour $f \in E$

   (b) Résoudre l'équation $\varphi(g) = 0_E$ d'inconnue $g \in E$. Quelle est la dimension du noyau de φ ?

   (c) Soit $g \in \ker(\varphi)$ fixée. Résoudre l'équation $\psi(f) = g$ d'inconnue $f \in E$ en utilisant le principe de superposition.

   (d) Donner l'ensemble des solutions de (E_H) et l'exprimer comme un noyau dont on donnera la dimension.

Exercice 2

On considère l'ensemble C des points de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$C : xy - z^2 = 0$$

c'est à dire qu'un point de l'espace dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dans le repère canonique est un point de C ssi $x_0 y_0 - z_0^2 = 1$.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est munit du produit scalaire canonique usuel.

Les deux parties ne sont pas indépendantes, en particulier on utilisera les notations de la partie I dans la partie II

Partie I : Étude des symétries

1. Donner deux exemples de points de C par leurs coordonnées.
2. On considère s_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan (xOy).

   Donner sans preuve les coordonnées de $s_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
3. Prouver que C est symétrique par rapport au plan (xOy), c'est à dire que si $M \in C$ alors $s_1(M) \in C$.
4. On considère la droite $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note p la projection orthogonale sur D et s le retournement d'axe D (ie la symétrie orthogonale par rapport à D).

   (a) Montrer que la matrice de p dans la base canonique est $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Montrer que C est symétrique par rapport à D, c'est à dire que si $M \in C$ alors $s(M)$ est encore dans C.
5. On note $\mathcal{P}_0$ le plan d'équation $\mathcal{P}_0 : x + y = 0$. Donner un lien entre D et $\mathcal{P}_0$ puis déduire que la matrice dans la base canonique de la réflexion de plan $\mathcal{P}_0$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que C est symétrique par rapport à $\mathcal{P}_0$ et donner un autre axe de symétrie de C.

Partie II : Quelques intersections

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{P}_\alpha$ et Q_α les plans affines d'équations respectives

$$\mathcal{P}_\alpha : x + y = \alpha,\ Q_\alpha : z = \alpha$$

1. Pour $\alpha \neq 0$, exprimer $\mathcal{P}_{-\alpha}$ en fonction de $\mathcal{P}_\alpha$ ainsi que $Q_{-\alpha}$ en fonction de Q_α en utilisant à chaque fois l'une des symétrie de la partie précédente.
2. Décrire rapidement les ensembles $C \cap \mathcal{P}_0$ et $C \cap Q_0$. On pourra tracer un schéma dans le plan Q_0 pour la deuxième intersection.
3. On considère dans cette question que $\alpha > 0$.
   (a) Donner la nature de la conique obtenue comme $C \cap Q_\alpha$ (on ne demande pas encore le tracé, seulement la nature).
   (b) Dans le repère de centre $O_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in Q_\alpha$ et dont les axes sont dirigés par $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tracer la conique $C \cap Q_\alpha$ dont l'équation est $xy = \alpha^2$.
4. On considère dans cette question que $\alpha = 2$.
   (a) On note $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur unitaire de D. Montrer que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_0$ et trouver une base orthonormée directe (u, v, w) de l'espace $\mathbb{R}^3$.
   (b) On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)$ où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique. Pour un pour $M \in \mathbb{R}^3$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B} = (u, v, w)$. Donner le lien entre X, P et X'.
   (c) Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, u, v, w)$, montrer que l'équation de $\mathcal{P}_2$ devient $x' = \sqrt{2}$ et celle de C devient $\frac{(x')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2} - (y')^2 = 0$.
   (d) Tracer dans le repère où elle est exprimée la conique d'équation $(y')^2 + \frac{(z')^2}{2} = 1$ (les axes sont (Oy') et (Oz')).
   (e) Justifier que la matrice de passage $P \in SO_3(\mathbb{R})$ sans calcul et donner la nature (seulement, pour l'instant) de f, l'endomorphisme canoniquement associé à P.
   (f) Donner les éléments géométriques permettant la caractérisation de f (c'est à dire donner une interprétation géométrique précise de l'opération qui transforme le repère canonique en $\mathcal{R}'$)
5. Pour un $\alpha > 0$, on définit le point $\Omega_\alpha = O + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} u$ (ses coordonnées sont celles du vecteur $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} u$). Tracer $C \cap \mathcal{P}_\alpha$ dans le repère (Ω_α, v, w).

Exercice 3
On note $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$.

Partie I : préliminaires trigonométriques

On pose $a, b \in \mathbb{R}$. On note $u_a = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$, $u_b = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$ et $n_b = \begin{pmatrix} -\sin b \\ \cos b \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{B} = (u_b, n_b)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.
2. On note (α, β) les coordonnées de u_a dans $\mathcal{B}$. Calculer α et β.
3. En déduire la valeur de $\cos(a - b)$ et $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.
4. Retrouver les formules de linéarisation pour $\cos(a)\cos(b), \sin(a)\sin(b), \sin(a)\cos(b)$.

Partie II

Pour $f, g \in E$, on pose $\psi(f, g) = \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$

1. Vérifier que ψ est un produit scalaire sur E. On note dorénavant $(f|g) = \psi(f, g) = \frac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ pour $f, g \in E$.

2. Pour tout entier $k > 0$, on pose $f_k : t \mapsto \cos(kt)$ et $g_k : t \mapsto \sin(kt)$. On pose de plus $f_0 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Calculer $\|f_0\|^2$, $\|f_k\|^2$ et $\|g_k\|^2$ (en considérant que ces fonctions sont des éléments de E).
3. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ avec m non nul, calculer $(f_n|g_m)$.
4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On suppose $n \neq m$. Montrer que $f_n \perp f_m$ et $g_n \perp g_m$ (pour $m, n \neq 0$ dans le deuxième cas).
5. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note F_N le sous espace de E défini par $F_N = \text{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N)$.
   Quels calculs montrent que la famille génératrice donnée pour F_N est une base orthonormée de cet espace ?
   Quelle est la dimension de F_N ?
6. Dans cette question on fixe $f \in F_N$ pour un $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
   (a) On note $f : t \mapsto a_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ pour des réels $a_0, a_1 \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$. Exprimer f en fonctions des f_n et g_n, puis exprimer a_0 puis $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots b_N$ sous forme de produits scalaires.
   (b) Montrer que $\|f\|^2 = 2a_0^2 + \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$
7. On ne fait plus d'hypothèse sur la fonction $f \in E$.
   On note $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$ et pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$.
   (a) Exprimer a_0, a_n, b_n (pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) sous forme de produits scalaires.
   (b) Que dire de a_n et b_n si f est paire ? impaire ?
   (c) Pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on note $S_N : t \mapsto a_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.
   Montrer que $S_N - f \perp F_N$.
   (d) Quelle est l'interprétation géométrique de S_N par rapport à f ?
   (e) Montrer que $\|f\|^2 = \|f - S_N\|^2 + \|S_N\|^2$.
   (f) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (a_n^2 + b_n^2)$ converge et que

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t \tag{1}$$

   Qu'en déduire pour $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n^2$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n^2$?
   (g) Montrer le théorème de Riemann-Lebesgue :
   Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ est continue alors $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
8. Dans la suite, on admet que l'inégalité (1) (de Bessel) est en réalité une égalité pour toute fonction $f \in E$. c'est à dire

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t$$

   On pose $f : \left\{ \begin{array}{rcl} [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \pi^2 - t^2 \end{array} \right.$.
   (a) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t$.
   (b) Calculer les coefficients b_n tels que définis à la question 7 et montrer que $a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$.
   (c) Montrer directement puis en utilisant la question 7 que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4}$ converge.
   Calculer ensuite sa somme.