

Plan tangent

Exercice 1

Trouver les plans tangents à la surface \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ et parallèles au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

Exercice 2

On considère la surface $S : x - 8yz = 0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$.

Déterminer les plans tangents à S qui contiennent la droite \mathcal{D} .

Surfaces réglées

Exercice 3 (Application directe du cours)

- On considère $f : (x, y) \mapsto x^3 - 3xy$. Montrer que f possède un point critique qui est un point col en $(0, 0)$.
- Montrer que la surface $S : z = x^3 - 3xy$ est réglée.

Exercice 4

Soit \mathcal{S} la surface définie par les équations paramétriques

$$x = u^2, \quad y = uv, \quad z = u - v$$

Montrer que \mathcal{S} est une surface réglée.
Donner le plan tangent en un point régulier.

Exercice 5

Donner une représentation paramétrique ainsi qu'une équation cartésienne du cône de

directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t + 1 \end{cases}$ et de sommet $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Donner une équation cartésienne du cylindre Σ de directrice $\Gamma : \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ et

de direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Montrer que la surface d'équation $x(y + z) = 1$ est un cylindre de direction $\text{Vect}(u) =$

$\text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et préciser une section.

Révolution

Exercice 8

On considère la courbe \mathcal{C} paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}, t \in [-\pi, \pi]$. Déterminer une équation de la surface de révolution de \mathcal{C} autour de (Oz) .

Exercice 9

Soit $S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 - z^2)$ (où $a > 0$ est fixé). Montrer que S est une surface de révolution autour d'un axe à préciser et tracer une méridienne.¹

Approfondissement

Exercice 10

Soit $a > 0$, et soit Γ l'intersection de la sphère \mathcal{S} d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et du cylindre \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$.

- Déterminer une paramétrisation de Γ .
- Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?
- Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan (xOy) . Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ .

Exercice 11

Soient $a, b, c > 0$. on considère la surface $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

- Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on considère le point $A_\theta = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par A_θ et contenue dans S .
- Soient $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Montrer qu'il est possible de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$
- En déduire deux familles de droites engendrant S puis montrer que toute droite incluse dans S est dans l'une de ces deux familles.

¹ Indication : pour la méridienne, on pourra d'abord chercher une équation sur les coordonnées polaires.