

Préambule

- Dans les exercices d'algèbre on manipule très souvent des ensembles. Si A et B sont des ensembles il faut savoir :
- traduire $x \in A$ suivant la manière dont est donné l'ensemble A : par une définition du cours, par compréhension ($A = \{x \mid x \text{ vérifie une certaine propriété}\}$)
 - comment on montre que $A \subset B$
 - si on a montré seulement une inclusion ou l'égalité de deux ensembles, en particulier lorsqu'on cherche à résoudre une équation.

I Nombres complexes, PTSI

I.1 Formes des nombres complexes

I.1.1 Changement de forme

- Savoir écrire la forme algébrique ou exponentielle d'un nombre donné.
- Connaître l'écriture théorique de chaque forme, attention à 0 qui n'a pas UNE forme exponentielle.
- Utiliser l'unicité pour la forme algébrique, attention aux arguments pour la forme exponentielle.
- Calcul du conjugué et du module dans chaque cas.
- Formules d'Euler.

I.1.2 Choisir la bonne forme

- Pour le calcul de somme, la forme algébrique est plus adaptée.
- Pour le calcul de produits et de quotients, on peut passer à la forme exponentielle.

I.2 Utilisation calculatoire

I.2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

- Connaître la forme (on prend $n \geq 2$) : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Elles vérifient l'équation $z^n = 1$.
- La somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (et de n'importe quel complexe) est nulle : lien avec les relations coefficients-racines de $X^n - 1$.
- Méthode de l'angle moitié.

I.2.2 Calcul de somme et d'intégrale

- Utilisation de $e^{iak} = (e^{ia})^k$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$ (et seulement dans ce cas) pour reconnaître des sommes géométriques.
- Utilisation des parties réelles et imaginaires de $e^{i\theta}$ pour le calcul d'intégrale ou de sommes trigonométriques.

I.2.3 Résolution d'équations de degré 2

- Racines conjuguées dans le cas d'une équation à coefficients réels et discriminant strictement négatif.
- Calcul sous forme algébrique ou exponentielle d'une racine carrée du discriminant lorsque qu'il n'est pas réel (les coefficients sont des complexes non réels).

II Polynômes, PTSI

II.1 Manipulations algébriques

- Degré et coefficient dominant d'une somme, d'un produit.
- Division euclidienne de deux polynômes. Application à la factorisation.
- Unicité des coefficients d'un polynôme, d'une expression polynomiale définie sur une infinité de valeurs.
- ne pas écrire $X = 0$ (ou tout autre constante) qui est l'égalité entre deux polynômes. On utilise l'évaluation, qui est une opération linéaire.

II.2 Racines

II.2.1 Factorisation

- Lien entre α est racine de P et la factorisation de P par $X - \alpha$.
- Caractérisation par la dérivation des racines multiples.

II.2.2 Résultats théoriques

- Théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant (à coefficients dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}) possède exactement autant de racines (comptées avec multiplicité) que son degré (il est scindé).
- Factorisation complète d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: connaître la forme (attention à ne pas oublier le coefficient dominant), la méthode pour déduire la factorisation réelle.
- Relations coefficients-racines : pour un polynôme de coefficient dominant égal à 1 et degré $n \geq 1$, le coefficient de X^{n-1} est l'opposé de la somme des racines et le coefficient constant est $(-1)^n$ fois le produit des racines.
Quand le polynôme considéré n'est pas de coefficient dominant égal à 1, on commence par factoriser par ce coefficient dominant.

III Espaces vectoriels et applications linéaires

III.1 Espaces vectoriels

III.1.1 Familles

- Familles libres : exemples de référence, méthode pour prouver qu'une famille est libre (suivre la définition). La liberté de 3 vecteurs n'est PAS le fait d'être 2 à 2 non colinéaires.
- Familles génératrices : idem.
- Bases : idem.
- Dans un espace de dimension n , une famille de n vecteurs est libre ssi elle est génératrice.
- Coordonnées d'un vecteur dans une base : définition théorique, savoir les trouver en pratique.
- Théorème de la base incomplète : dans un espace de dimension finie, on peut compléter toute famille libre en une base (comprendre : on fixe une base d'un sous-espace qui nous intéresse et on la complète en une base de E).

III.1.2 Sous-espaces

- Méthode pour prouver que F est un sous-espace vectoriel de E (un espace de référence/connu).
- Égalité de deux espaces : inclusion + égalité des dimensions.
- Espaces supplémentaires, espaces en somme directe : définition, caractérisation générale, théorème de la base adaptée. Dimension d'une somme directe.

III.2 Applications linéaires

- Définition, utilisation pour calculer l'image d'une combinaison linéaire (entre deux vecteurs, ou sous forme de somme).
- Applications linéaires classiques : dérivation, intégration sur un segment fixé, évaluation d'une fonction ou d'un polynôme, identité, homothétie, projection, symétrie.
- Noyau et image : définitions, lien avec l'injectivité et la surjectivité.
- Théorème du rang.
- Caractérisations de la bijectivité : l'image d'une base est une base, injectivité ou surjectivité + égalité des dimensions.
- Quand E, F sont de dimensions finies, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

IV Matrices, déterminants

IV.1 Espace des matrices

IV.1.1 Opérations

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \times p$, combinaison linéaire de matrices de même taille.
- Produit matriciel entre matrices compatibles. Produit d'une matrice par une colonne (dans cet ordre) : interprétation en tant que combinaison linéaire des colonnes.
- Transposition, lien avec les combinaisons linéaires (linéarité de la transposition) et avec le produit (inverse l'ordre).
- Puissances de matrices carrées, cas particulier $M^0 = I_n$. Cas particulier : matrices triangulaires ou diagonales.
- Rang d'une matrice en tant que nombre de pivots dans la matrice échelonnée réduite. $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^T)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

IV.1.2 Matrices inversibles

- Calcul en pratique de l'inverse.
- Utilisation de la définition pour montrer l'inversibilité (par exemple lorsque $M^2 + 2M - I_2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, montrer que M est inversible).
- Utilisation pour exprimer l'unique solution d'un système linéaire.
- Lien avec le rang.

IV.2 Matrices représentant un objet

IV.2.1 Matrice d'une famille dans une base

On considère $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ où \mathcal{B} est une base d'un espace E .

- Construction effective par calcul des coordonnées des vecteurs représentés dans la base choisie.
- Interprétation du rang comme dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ ie. le rang de la famille (u_1, \dots, u_p) . On en déduit (en utilisant la base canonique de K^n) que le rang d'une matrice est également la dimension de l'espace engendré par ses colonnes.
- Si M est carrée ($\dim(E) = p = \text{Card}(u_1, \dots, u_p)$), M est inversible ssi (u_1, \dots, u_p) est une base. M est alors la matrice de passage de \mathcal{B} à la nouvelle base $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_p)$.
Pour $x \in E$ on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ que l'on note souvent $X = PX'$ où X représente la colonne des coordonnées de x dans \mathcal{B} et X' celle dans \mathcal{B}' .

IV.2.2 Matrice d'une application linéaire

Cette fois $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ où $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ sont des bases de E et F respectivement.

- Construction en pratique : on calcule les coordonnées de $f(\mathcal{B}_E)$ dans la base \mathcal{B}_F , le cas le plus courant des endomorphismes étant $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$.
- $\text{rg}(f) = \text{rg}(M)$. Lien entre le théorème du rang et le nombre de pivots de M , les inconnues principales et paramètres d'un système de matrice M .
- Calcul de $\ker(f)$ en calculant d'abord $\ker(M)$: on traduit les colonnes obtenues qui sont des coordonnées dans \mathcal{B}_E .

IV.2.3 Matrice d'un endomorphisme

On prend le cas particulier (par rapport au point précédent), $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$.

- Matrice canoniquement associée à un endomorphisme de \mathbb{K}^n , endomorphisme de \mathbb{K}^n canoniquement associé à une matrice.
- f est bijective ssi M est inversible.
- Changement de base. Si \mathcal{B}' est une autre base de E et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}')$ est la matrice de passage de \mathcal{B}_E à \mathcal{B}' alors on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P$ que l'on note souvent $M' = P^{-1} M P$ ou encore $M = P M' P^{-1}$.
- $\text{tr}(f) = \text{tr}(M) = \text{tr}(M')$.

IV.3 Déterminant

Ici toutes les matrices sont forcément carrées.

IV.3.1 Calculs

- Propriétés calculatoires : effet des opérations élémentaires (attention à la multiplication d'une colonne/ligne), factorisation d'UNE ligne ou colonne, invariance par transposition, nul si la famille des colonnes/ligne est liée (en particulier si une colonne est nulle ou deux colonnes proportionnelles).
- Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
- Déterminant triangulaire : il vaut le produit des coefficients diagonaux.
- $\det(M) \neq 0$ ssi M est inversible.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

IV.3.2 Déterminant d'une famille, d'un endomorphisme

- Le déterminant d'une famille (préciser la base utilisée pour construire la matrice) est non nul ssi cette famille est une base.
- Le déterminant d'un endomorphisme f ne dépend pas de la base choisi pour exprimer la matrice de f et est non nul ssi f est bijective.
- Orientation d'une base du plan et de l'espace : c'est le signe du déterminant dans la base canonique (ou dans une BOND) qui la donne.

V Réduction, diagonalisation

On se place ici en dimension finie exclusivement.

V.1 Éléments propres

V.1.1 Pour une matrice

On considère $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée

- Les vecteurs propres de M sont les colonnes $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ telles qu'il existe un scalaire λ (appelé valeur propre associée) tel que $MX = \lambda X$.
- Les espaces propres de M sont les $\ker(M - \lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - M)$, ensembles des solutions de l'équation $MX = \lambda X$ où λ est une valeur propre et X une colonne.
- Un espace propre est de dimension au moins 1.
- Le polynôme caractéristique de M est $\chi_M(x) = \det(xI_n - M)$. C'est un polynôme unitaire de degré n .
- $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M ssi $\chi_M(\lambda) = 0$ (λ est une racine de M)
- Les espaces propres sont en somme directe. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre (des vecteurs propres sont forcément non nuls, rappelons le).
- Théorème du rang : $\dim(\ker(M - \lambda I_n)) = n - \text{rg}(M - \lambda I_n)$.
- Savoir montrer que si $MX = \lambda X$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $M^k X = \lambda^k X$

V.1.2 Pour un endomorphisme

On considère $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Vecteurs propres et valeurs propres : $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $x \neq 0_E$.
- $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f)$ sont les espaces propres.
- On a les mêmes propriétés des espaces propres, polynôme caractéristique, théorème du rang... que pour les matrices.

V.2 Réduction

V.2.1 Diagonalisation

On énonce les propriétés pour une matrice M , on peut les traduire mot pour mot pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ (en dimension finie).

- Définition de M est diagonalisable : il existe une matrice D diagonale semblable à M .
- Définition de f est diagonalisable : il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale ie \mathcal{B} est composée de vecteurs propres de f .
- M est diagonalisable ssi $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(M)} E_{\lambda}(M)$.
- M est diagonalisable sur \mathbb{K} ssi χ_M est scindé sur \mathbb{K} et pour chaque racine λ , $\dim(\ker(M - \lambda I_n))$ est égale à la multiplicité de λ comme racine de χ_M .
- SI χ_M est scindé sur \mathbb{K} et à racines simples, ALORS M est diagonalisable.

V.2.2 Trigonalisation

Cette fois on énonce les propriétés pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$.

- Si χ_f est scindé sur \mathbb{K} alors on peut trouver une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, avec sur sa diagonales les racines de χ_f
- Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ toutes les racines complexes de χ_f (avec multiplicité, un même nombre peut apparaître plusieurs fois. Le théorème de d'Alembert-Gauss nous assure que χ_f est scindé sur \mathbb{C}). Alors

$$\det(f) = \prod_{k=1}^n \lambda_k \text{ et } \text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

- On en déduit que $\chi_f(x) = x^n - \text{tr}(f)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$ lorsque $n \geq 2$.

V.2.3 Matrices symétriques réelles

Soit $A \in \mathfrak{S}_n(\mathbb{R})$

- Les espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.
- A est diagonalisable et on peut construire une base de vecteurs propres de A qui soit une base orthonormée de \mathbb{R}^n .
Ainsi, en choisissant judicieusement les vecteurs propres, on peut trouver $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = P^TAP$ est diagonale.