Préambule

Un piège classique en analyse est celui des notations. Ainsi il ne faut pas confondre la fonction f et l'une de ses valeur $f(x)$ (qui n'a de sens que si x est dans le domaine de définition de f, ni la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un de ses termes u_n.

I Nombres réels et suites, PTSI

I.1 Nombres réels

- Majorant, minorant d'un ensemble de réels. Borne supérieure et borne inférieure.
- Partie entière d'un nombre réel.
- Intervalles de $\mathbb{R}$.

I.2 Suites

- Suites majorées, minorées, borne inférieure ou supérieure d'une suite.
- Suites convergentes : définition, exemples et contre-exemples.
- Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, composition par une fonction possédant une limite. Passage à la limite des inégalités larges.
- Théorème d'existence de limite : encadrement, limite monotone, suites adjacentes.
- Suites extraites des termes d'indices pairs, d'indice impairs, convergence.

II Continuité, dérivabilité, PTSI

II.1 Continuité

- Limite d'une fonction : finie ou infinie, en un point ou en $\pm\infty$. Opérations sur les limites.
- Théorème d'encadrement, de la limite monotone.
- Continuité en un point, sur un intervalle.
- Prolongement par continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires : faire la différence avec le théorème de la bijection. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème de la bijection : si $f : I \to J$ est continue, strictement monotone et que $f(I) = J$ alors f est bijective (partie triviale), J est un intervalle (c'est le TVU) et f^{-1} est continue (le résultat du théorème est là).
- Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et possède une valeur minimale et une valeur maximale (qui ne sont pas seulement des bornes inf/sup, mais bien des min/max).
  Ce n'est pas le cas lorsque l'intervalle de départ n'est pas borné (penser à exp sur $]-\infty, 0]$ qui est bornée mais n'a pas de valeur minimale) où qu'il n'est pas fermé (facile : $Id : x \mapsto x$ n'a ni minimum ni maximum si on la définit sur $]0, 1[$).

II.2 Dérivabilité

On commence TOUJOURS par justifier (au moins rapidement), la dérivabilité d'une fonction AVANT de la dériver.

- Nombre dérivé, interprétation comme coefficient directeur de la tangente. Déduire une équation de la tangente en un point.
- Dérivabilité par opération
- Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle : point critique ($f'(x) = 0$, lien avec les extrema), théorème de Rolle, des accroissements finis.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Inégalité des accroissements finis
- Lien entre le signe de la dérivée et les variations, sur un INTERVALLE. Exemple de $f : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ qui n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ bien que sa dérivée y est toujours nulle. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle... Par contre f est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, dérivation des fonctions à valeurs complexes.
- Formule de Leibniz, cas particulier $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

III Analyse asymptotique, PTSI

III.1 Équivalents

- Définition de deux suites équivalents, deux fonctions équivalentes en a.
- Opérations licites : produit et quotient terme à terme, mise à une puissance fixe, changement de variable. Et c'est tout.
- Deux fonctions/suites équivalentes ont même limite.
- Deux fonctions/suites équivalentes ont même signe au voisinage du point d'équivalence.

III.2 Négligeable, dominé

- Définition des o_a et O_a.
- Traduction courante (donnée ici pour les suites, à adapter aux fonctions) : $u_n \underset{+\infty}{\to} 0 \iff u_n = o_{+\infty}(1)$ et $(u_n)_n$ est bornée ssi $u_n = O_{+\infty}(1)$.
- Opérations : simplification d'une somme de o_a, changement de variable. $u_n o_{+\infty}(v_n) = o_{+\infty}(u_n v_n)$ (à lire dans les deux sens, y compris lorsque $v_n = 1$).
- Lien fondamental : $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$.
- Théorème de croissances comparées, comparaison des fonctions puissances en 0 et $+\infty$. Attention à bien citer le théorème et le changement de variable éventuel.

III.3 Développements limités

- Définition d'un DL en a qui est forcément un nombre et pas $\pm\infty$, cas particulier d'un DL en 0. L'ordre d'un DL est la puissances présente dans le o_a.
- Le terme constant d'un DL est toujours la valeur de la fonction au point considéré.
- Lien entre DL et équivalent : l'équivalent est le premier terme non nul dans un DL (celui où la puissance est la plus petite, s'il existe).
- Lecture d'une équation de tangente sur le DL. Utilisation du DL à l'ordre 2 ou 3 pour préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.
- f est dérivable en a ssi f possède un DL à l'ordre 1 en a.
- Théorème de Taylor-Young et DL usuels en 0.
- Développement asymptotique (en $\pm\infty$) : obtenu à partir de DL usuels en effectuant un changement de variable, le plus classique étant $u = \frac{1}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.

IV Intégrales

IV.1 Intégration sur un segment

Ici le cadre est : les fonctions considérées sont continues sur un segment $[a, b]$.

IV.1.1 Propriétés de l'intégrale

- $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire algébrique située entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses. Il faut changer le signe si $b < a$.
- Positivité, linéarité, croissance de l'intégrale.
- Inégalité triangulaire : $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f|$.
- Si f est continue et positive et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

IV.1.2 Théorème fondamental et conséquences

— Si I est un intervalle $a \in I$ et f est continue sur I alors $F : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{cases}$ est dérivable sur I et sa dérivée est f. Autrement dit F est une primitive de f sur l'intervalle I. On en déduit que toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.
D'ailleurs le TAF nous permet d'affirmer que deux primitives sur un même intervalle I de f diffèrent d'une constante.

— Si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$ et on peut retrouver l'inégalité des accroissements finis dans ce cas.

IV.1.3 Outils de calcul

— Intégration par parties, attention à justifier la classe $\mathcal{C}^1$. Un exemple très très très classique. Les intégrales de Wallis, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ qui s'intègre en séparant la puissance en $1 + n - 1$ puis en utilisant $\cos^2 = 1 - \sin^2$. Comme d'habitude, il faut faire attention à la puissance dans le crochet car $0^0 = 1$ quand la puissance est fixe et vaut 0.

— Changement de variable.

IV.1.4 Sommes de Riemann

— Connaître la formule et l'interprétation : méthode des rectangles à gauche ou à droite.

— Hypothèse : f est continue.

— Reconnaître les cas d'applications : pour une somme dont l'indice est noté k, il apparaît seulement (éventuellement après factorisation) sous la forme $\frac{k}{n}$ où n est le nombre de termes dans la somme.

IV.2 Intégrales impropres

Cette fois on s'intéresse à des fonctions continues sur un intervalle quelconque I de bornes a et b qui peuvent éventuellement être infinies ou ouvertes.

IV.2.1 Convergence, intégrabilité

— Définitions de la convergence d'une intégrale impropre en une ou deux bornes.

— Fonctions intégrables : il s'agit de la convergence de $\displaystyle\int_I |f|$. Si f est intégrable alors $\displaystyle\int_I f$ converge. Contre-exemple à la réciproque : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

— Linéarité, inégalité triangulaire : valable en cas de convergence.

— Intégrales de référence : Riemann et exponentielle, connaître les conditions de convergence. Attention $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge toujours.

IV.2.2 Théorèmes de convergence

— Comparaison des fonctions positives : inégalité, domination, équivalence (l'équivalence est la seule comparaison qui permet d'affirmer que les intégrales ont même nature).

— Changement de variable : s'il est bien $\mathcal{C}^1$ et bijectif les intégrales ont même nature, sans hypothèse sur le signe.

— Pour une fonction f continue sur $[a, b[$, sans hypothèse de signe, si $f = o_b(g)$ où g est intégrable (on prend généralement g positive, une fonction de référence et donc l'intégrabilité est la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$), alors f est intégrable sur $[a, b[$.

IV.2.3 Intégration par parties

- Même hypothèse de classe $\mathcal{C}^1$. Si on veut écrire directement la formule, il faut s'assurer de la convergence du crochet avant tout. Alors on peut affirmer que les deux intégrales ont même nature.
  En pratique, on utilise plutôt le point suivant...
- Généralement, on effectue une IPP sur un segment avant de faire tendre une borne vers la valeur voulue. Voir l'exemple important de la fonction Γ.

IV.3 Intégrales à paramètre

IV.3.1 Forme et piège classique

On étudie dans ce cadre des fonctions de la forme $f : x \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)\mathrm{d}t$ où les bornes sont fixes et la variable x est présente dans l'intégrande.

Piège : quand la variable apparaît comme borne, il s'agit plutôt d'un cas d'application du théorème fondamental.

Passer de l'un à l'autre : parfois un changement de variable (classiquement $u = xt$) permet de transformer une intégrale à paramètre en primitive relevant du théorème fondamental.

IV.3.2 Les théorèmes

- Bien connaître les hypothèses et leur nombre.
- Hypothèses sur la variable x (celle de la fonction f, pas celle d'intégration) : pour prouver la continuité de f on impose la continuité sur la variable x, pour prouver la classe $\mathcal{C}^1$ de f on impose la classe $\mathcal{C}^1$ sur la variable x.
- La domination doit être indépendante de la variable de f, mais peut dépendre de la variable d'intégration. D'ailleurs la fonction notée g dans le cours doit être intégrable par rapport à la variable t.

IV.3.3 Cas particulier de l'intégration sur un segment

- On peut dominer par une constante, car les constantes sont intégrables sur un segment. C'est clairement faux quand l'intervalle d'intégration est non borné (sauf pour la constante 0, qui ne domine pas grand monde...)
- Si en plus le domaine de définition (ou d'étude) de f est un segment ($x \in [a,b]$, fermé borné) on peut utiliser le cours sur les fonctions de plusieurs variables : l'image par une fonction continue d'un fermé borné (ici, c'est la continuité de φ ou de ses dérivées partielles) est bornée et on peut dominer par une constante sans calculer celle-ci.

V Séries numériques

V.1 Séries à termes positifs

Une série numérique est définie comme la suite de ses sommes partielles.

- Preuve de convergence : borner les sommes partielles, théorème de comparaison : majoration, négligeabilité.
- CNS de convergence : comparaison par équivalent. On peut prouver la divergence ainsi.
- Séries dé référence : Riemann, géométrique, exponentielle.
- Pour une série à termes strictement positifs : règle de d'Alembert.

V.2 Séries à termes complexes

- Une série à termes complexes converge ssi ses parties réelle et imaginaire convergent.
- Convergence absolue : si une série converge absolument alors elle converge.
- Produit de Cauchy.

VI Séries entières

VI.1 Convergence

- Domaine de convergence d'une série entière, la somme est une fonction d'une variable réelle ou complexe.
- Rayon de convergence : définition par les suites bornées, lien avec la convergence absolue et la divergence grossière.

— Méthode de calcul du rayon : on trouve pour quelles valeurs de $|x|$ ou $|z|$ la série numérique correspondante converge et pour quelles valeurs elle diverge. On déduit à chaque fois une inégalité sur le rayon de convergence.
— Application de la règle de d'Alembert : bien penser à prendre $x \neq 0$ et $u_n = |a_n x^n|$ (même chose avec une variable complexe).

VI.2 Règles de calcul

— Intégration et dérivation terme à terme d'une série entière : valable à l'intérieur du domaine de convergence (on exclu les bornes de l'intervalle).
— Unicité des coefficients, valable lorsque le rayon de convergence est strictement positif.
— Produit de Cauchy de deux séries entières : domaine de validité, formule, exemple sur l'exponentielle.

VI.3 Applications

— Calculs de sommes de séries numériques : on remplace x par une valeur bien choisie.
— Dérivation terme à terme : elle permet de multiplier par l'indice (souvent noté n) le terme général. Voir par exemple les calculs d'espérance en probabilités.
— Résolution d'équation différentielle : on cherche une solution sous forme d'un DSE de rayon de convergence strictement positif, on trouve une relation de récurrence sur les a_n que l'on résout. On vérifie finalement que la série trouvée est bien de rayon de convergence strictement positif.

VII Équations différentielles

VII.1 La théorie

— Théorème de Cauchy dans plusieurs cas : il existe une unique solution à un problème de Cauchy. Connaître la forme des conditions initiales pour chaque forme étudiée : équations scalaires d'ordre 1 ou 2, système différentiel.
— Ensemble des solutions de l'équation homogène associée : c'est un espace vectoriel de dimension l'ordre de l'équation pour les équations scalaires, de dimension n pour un système différentiel à coefficients constants carré de taille n.

VII.1.1 La pratique

— Savoir exprimer les solutions d'une équations d'ordre 1 homogène à coefficient non constant, y compris sous forme d'intégrale en utilisant le théorème fondamental.
— Variation de la constante pour trouver une solution particulière d'une équation d'ordre 1.
— Solutions d'une équation homogène d'ordre 2 à coefficients constants, en résolvant l'équation caractéristique (voir le cours sur les suites récurrentes linéaires et le lien avec les ordres supérieurs)
— Solution particulière d'une équation d'ordre 2 lorsque le second membre est de la forme $k_1 e^{k_2 t}$ où k_1, k_2 sont des constantes, éventuellement complexes.
— Utilisation du principe de superposition pour la recherche de solutions particulières.
— Méthode de variation de la constante pour les équations d'ordre 2 à coefficients non constants lorsque l'on connaît une solution de l'équation homogène.
— Résolution d'une système différentiel dont la matrice est diagonalisable.

VIII Fonctions de plusieurs variables

Voir la fiche de synthèse.