# Devoir maison 9

A rendre le au plus tard le 03/03/2017. Vous pouvez rédiger ce devoir à 2.

**Exercice 1**
Dans cet exercice, on va étudier et utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

## Partie I

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\lambda I_2 - A)$.
2. L'équation $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ est appelée équation caractéristique de la matrice $A$. Résoudre cette équation. On notera $\lambda_1 < \lambda_2$ les solutions (indication cachée dans l'énoncé : ces solutions sont réelles. Pourquoi ?).
3. Justifier que l'équation $(I_2 - A)X = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^2$ possède des solutions non nulles. Calculer ensuite ces solutions et interpréter géométriquement l'ensemble obtenu.
4. Même question avec l'équation $(3I_2 - A)X = 0$.
5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
6. On pose $D = P^{-1}AP$. Quelle est la forme particulière de $D$ ?
7. Calculer $D^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, exprimer $A^n$ en fonction de $P$ et $D$. On commencera par le cas $n = 1$
9. Montrer que $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n+1 & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 3^n+1 \end{pmatrix}$.

## Partie II

On considère les deux suites $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 2, b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

1. Calculer $a_1, b_1, a_2, b_2$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n, b_n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(a_n - b_n)$ est constante.
4. En déduire la division euclidienne de $a_n$ par $b_n$ puis le pgcd de $a_n$ et $b_n$ pour tout $n$.
5. Montrer que $a_n$ est de la parité de l'entier $n$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ecrire une relation liant $X_n, X_{n+1}$ et $A$.
7. Montrer que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$.

## Partie III

Dans cette partie, on étudie la suites $(a_n)$ d'une autre manière.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $a_{n+2}$ en fonction de $a_{n+1}$ et $a_n$ uniquement.
2. En déduire l'expression de $a_n$ en fonction de $n$.
3. Retrouver le résultat $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec cette expression.
4. Donner un équivalent simple de $(a_n)$.