Sujet 1

Exercice 1

Soit la matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{ij} = 1$ si i est différent de j et $a_{ii} = 0$ pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ln(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout nombre réel strictement positif a.
   En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction f.

Sujet 2

Exercice 3

E est un espace vectoriel de dimension n, u est un endomorphisme nilpotent de E, c'est à dire qu'il existe un entier naturel p tel que u^p soit égal à l'endomorphisme nul.

On suppose que x est un vecteur de E et k un entier naturel tel que $u^k(x)$ soit différent du vecteur nul.

1. Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ est libre.
2. on désigne par e^u l'endomorphisme de E : $e^u = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$ (qui est en fait une somme finie puisque u^k est nul quand k est supérieur ou égal à p).
   Déterminer $\ker(e^u - Id_E)$.

Exercice 4

On désigne par a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de : $((a + 1)a^{\frac{1}{n}} - a(a + 1)^{\frac{1}{n}})^n$.

Sujet 3

Exercice 5

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 6

A est une matrice carrée, d'ordre n, inversible.

Déterminer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Sujet 4

Exercice 7

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit la fonction f_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n - nx + 1$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. On désigne cette unique solution par x_n.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
5. Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 8

Déterminer les matrices réelles A, carrées d'ordre n, telles que $AA^TA = I_n$.

Sujet 5

Exercice 9

On désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies de $\mathbb{N}$ dans $0, 1$ par

— $X_0 = 1$

— $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 0.2$

— $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = 0.4$

On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$

1. Déterminer x_1 et x_2.
2. Déterminer une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.
3. Déterminer x_n en fonction de n.

Exercice 10

On désigne par A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose de la matrice A vérifie $A^T = -A$.

1. Déterminer les valeurs propres réelles possible de la matrice A.
2. En déduire que les matrices $A + I_n$ et $A - I_n$ sont inversibles.
3. Montrer que la matrice $(A + I_n)(A - I_n)^{-1}$ est orthogonale.