Géométrie du plan, coniques

Exercice 1
On considère le cercle de centre O et rayon 1 noté $\mathcal{C}$. Soit A, B deux points de $\mathcal{C}$ non confondus et non diamétralement opposés. On pose alors $\mathcal{C}_2$ le cercle de diamètre $[AB]$.

On note $u = \widehat{AOB}$ l'angle non orienté entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. On a alors $0 < u < \pi/$

1. Faire un schéma représentant les deux cercles et u.
2. Montrer que la partie du plan extérieure à $\mathcal{C}$ et délimitée par $\mathcal{C}_2$ est d'aire

$$\frac{\pi}{2}\sin^2(\frac{u}{2}) + \frac{\sin(u)}{2} - \frac{u}{2}$$

.

3. Question bonus : Pour quel angle u cette aire est-elle maximale ?

Exercice 2
1. Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant $x^2 + xy + y^2 - 3x - 4y = 0$.
2. Soient trois points A, B et C d'une droite $(\mathcal{D})$. Trouver les l'ensemble des points M du plan pour lesquels il existe un cercle tangent à $(AM), (CM)$ et à $(\mathcal{D})$ en B.

Exercice 3
Soient $a \in \mathbb{R}^{*+} etb \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument de $a^{\frac{1-ib}{1+ib}}$.

Exercice 4
Soient a, b deux réels non nuls. Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la droite D d'équation

$$D : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

et un point M de coordonnées $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les coordonnées (x_1, y_1) du symétrique M_1 de M par rapport à D.
2. Donner de même $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$, respectivement symétriques de M par rapport à (Ox) et (Oy).
3. Déterminer le lieu des points M pour lesquels M_1, M_2, M_3 sont alignés et donner la nature de cet ensemble.

Exercice 5
Donner, suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$, la nature de la conique d'équation

$$(1 + m)(x^2 + y^2) - 2mxy = m$$

Courbes paramétrées

Exercice 6
Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos 3t, y = \sin 2t)$.

Exercice 7
Soit $\Gamma : y = ax^2$. Déterminer l'équation de la normale en un point M d'abscisse $t \neq 0$.

Déterminer l'ensemble γ des points ou se coupent deux normales à Γ qui soient perpendiculaires.

Déterminer l'enveloppe des normales à Γ.

Exercice 8
1. Soit $b \neq 0$. Etude de la courbe paramétrée $(x = \cos(3t), y = b\sin^3(t))$ sur $[-\pi, \pi]$. On montrera que l'on peut réduire l'intervalle d'étude par des symétries à préciser.
2. On choisit $b = 1$. Déterminer les points doubles et un vecteur directeur de la tangente en ces points.
3. Donner un développement limité de x et y en 0. Que peut-on en déduire ? Donner l'allure de la courbe au voisinage de l'origine.
4. Dans le cas général, comparer les courbes obtenues pour b et $-b$. Comment déduit-on toutes les courbes du cas $b = 1$?

Exercice 9
Caractériser et tracer la conique $(C) : y^2 - x^2 = 1$.

Donner une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la courbe à l'aide des fonctions ch et sh.

Déterminer une équation de la famille des normales (H) à (C). Déterminer la développée (γ) de (C) et tracer après étude.

Exercice 10
1. Représenter la courbe C paramétrée par $x(t) = 2t^2$, $y(t) = 2t$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_t au point de paramètre t.
3. Trouver les conditions sur t et u pour que T_t et T_u soient perpendiculaires.
4. Déterminer le lieu des points d'intersection des tangentes perpendiculaires (appelé podaire de C).

Exercice 11
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit un cercle $\mathcal{C}_t$ de rayon a tangent à (Ox) en un point T d'abscisse t. Soit M le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}_t$ avec l'autre tangente à $\mathcal{C}_t$ issue de O.

1. Tracer la figure.
2. Déterminer les coordonnées de M.

3. Etudier la trajectoire.

Exercice 12
On considère l'ensemble E d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le plan.

1. Tracer les asymptotes à cette courbes.
2. Tracer la courbe.
3. Déterminer une paramétrisation $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ à l'aide des fonctions ch et sh.
4. Déterminer une équation cartésienne d'une normale à la courbe au point de paramètre t.
5. En déduire la développée de $\gamma(t)$.
6. Faire l'étude et tracer la développée de $\gamma(t)$.

Exercice 13
On considère la courbe paramétrée par $M(t) = \left(-\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}\right)$.

1. Etude et tracé.
2. Donner les équations de la tangente et de la normale en un point de paramètre t.
3. Montrer qu'il existe deux droites et deux seulement qui sont à la fois tangentes et normales à la courbe.

Exercice 14
Dans le plan affine euclidien usuel, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$D_t : x\sin(t) - x\cos(t) + \sin^3(t) = 0$$

1. Déterminer l'enveloppe Γ de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.
2. Déterminer et étudier les points stationnaires de Γ.
3. Représenter Γ.

Exercice 15
On considère l'arc paramétré $\mathcal{C}$ défini par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+9}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{t(t^2+9)}{t^2+1} \end{cases}$$

1. Etudier les symétries éventuelles de $\mathcal{C}$.
2. Etudier les variations de x et y.
3. Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}$ et les tangentes horizontales et verticales.
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.
5. Soit D une droite du plan. Montrer que $D \cap \mathcal{C}$ est fini et que $|D \cap \mathcal{C}| \leqslant 4$.

Géométrie de l'espace, surfaces

Exercice 16
Dans l'espace munit d'une repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère

$$C_1 : \begin{cases} z = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{et } C_2 : \begin{cases} z = x^2 + 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

. Déterminer une équation cartésienne du lieu S des milieux des segments $[M_1M_2]$ où M_1 et M_2 parcourent C_1 et C_2 respectivement.

Exercice 17
On note $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution de $\mathcal{D}$ autour de (Oz).

Donner également une représentation paramétrique.

Exercice 18
Montrer que $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est non bornée.

Trouver les points critiques et préciser leurs natures si possible. Montrer que le point $(0, 0)$ est un point col, c'est à dire qu'il n'est ni minimum ni maximum local.

Calculer $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y)$.

Exercice 19
On considère la surface d'équation paramétrique $S : \begin{cases} x = u^2 \\ y = uv \\ z = 2u + v \end{cases}$.

1. Donner le plan tangent $\mathcal{P}$ au point de paramètre $(1, 1)$.
2. Donner une équation cartésienne de S.
3. Déterminer l'intersection $S \cap \mathcal{P}$.

Exercice 20

1. Reconnaître la surface S d'équation $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère le point $A(\lambda)$ de coordonnées $(0, 0, \lambda)$. Trouver, s'il en existe, les droites $\mathcal{D}$ telles que $\mathcal{D}$ est horizontale, passe par $A(\lambda)$ et coupe S en un unique point.
3. Donner une équation cartésienne de la réunion de toutes les droites trouvées dans la question précédente. Comme qualifier la surface obtenue ?

Espaces euclidiens, isométries

Exercice 21
On note r une rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe D, distincte de l'identité et s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P.

Montrer que si $P = D^\perp$ alors $s \circ r = r \circ s$.

Etudier la réciproque.

Exercice 22
On donne $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma = ab + bc + ac$, $s = a + b + c$.

1. Montrer que M est orthogonale ssi $\sigma = 0$ et $s \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi $\sigma = 0$ et $s = 1$.
3. ($\star$) Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R})$ ssi il existe $k \in [0, \frac{4}{27}]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + k$

Exercice 23

Soit $A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 4 & -12 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle transformation géométrique r de $\mathbb{R}^3$ A représente-t-elle ?
2. Donner l'image par r du plan P d'équation $x - y + 4z = 1$.

Exercice 24
On note F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, s_F la symétrie orthogonale par rapport à F et p_F le projecteur orthogonal sur F.

1. Que dire de l'endomorphisme $s_F \circ p_F - p_F \circ s_F$?
2. s_F et p_F sont-ils des automorphismes orthogonaux ?
3. Dans cette question on se place dans le cas $n = 4$. On définit F par : $X \in F \iff \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i x_i = 0$ où les x_i sont les coordonnées de X dans la base canonique.
   (a) Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique ainsi que celle de s_F.
   (b) Déterminer la matrice dans la base canonique de $s_F \circ p_F + p_F \circ s_F$. Quel est cet endomorphisme ?